SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Beispiel: Gleichverteilung

Eine besonders einfache kontinuierliche Dichte stellt die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ dar. Sie ist definiert durch

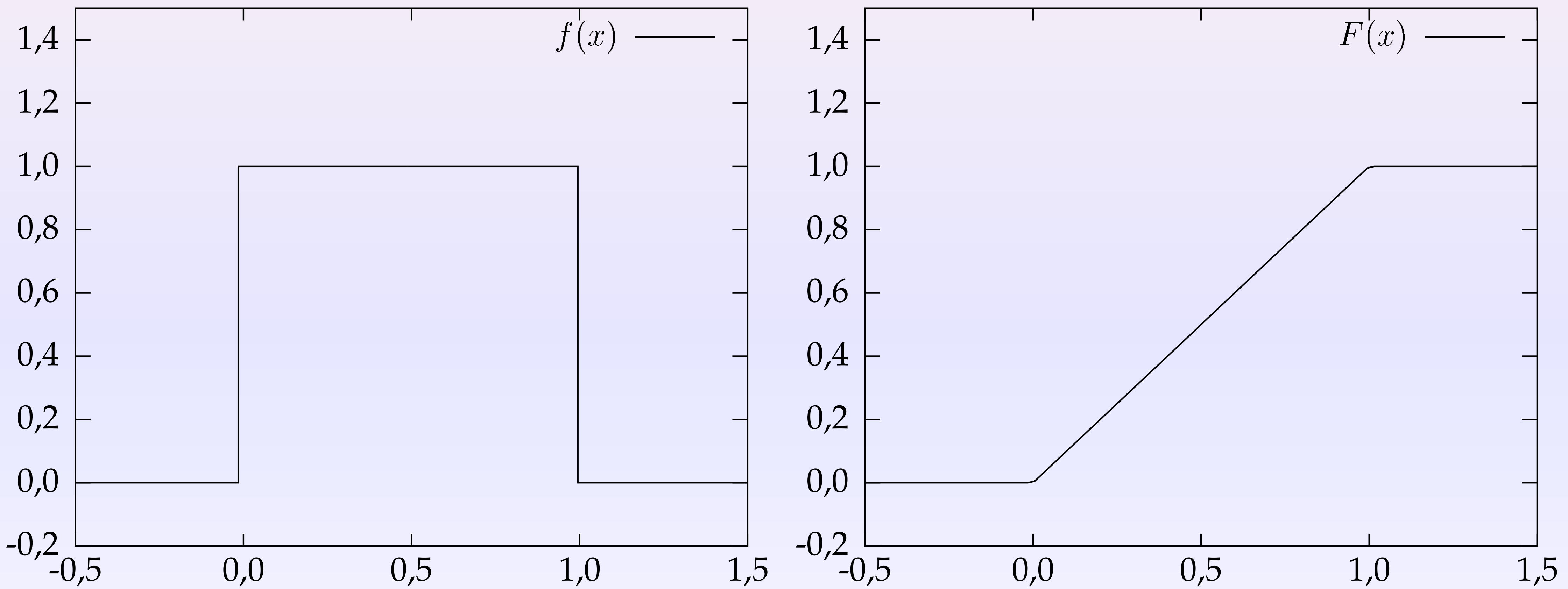
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \leq x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Beispiel: Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$



Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$

Beobachtungen:

(Eigenschaften der Verteilungsfunktion)

- F_X ist monoton steigend.
- F_X ist stetig. Man spricht daher auch von einer „stetigen Zufallsvariablen“.
- Es gilt: $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
- Jeder (außer an endlich vielen Punkten) differenzierbaren Funktion F, welche die zuvor genannten Eigenschaften erfüllt, können wir eine Dichte f durch $f(x) = F'(x)$ zuordnen.

Es gilt

$$\Pr[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Bei den von uns betrachteten Dichten besteht zwischen den Ereignissen „$a < X \le b$“, „$a \le X \le b$“, „$a \le X < b$“ und „$a < X < b$“ kein wesentlicher Unterschied, da

$$\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

2.1.3 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

σ-Algebren

Definition:

Sei Ω eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(E1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(E2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Für jede (endliche) Menge Ω stellt die Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra dar.

Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist die Klasse der Borel'schen Mengen, die aus allen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ besteht, welche sich durch (abzählbare) Vereinigungen und Schnitte von Intervallen (offen, halboffen oder geschlossen) darstellen lassen, eine σ-Algebra.

Kolmogorov-Axiome

Definition: (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\Pr[.] \;:\; \mathcal{A} \to [0,1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(W1) $\Pr[\Omega] = 1$.

(W2) $A_1, A_2, \ldots$ seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt $\Pr[A]$ Wahrscheinlichkeit von A. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist definiert durch das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.

Die in obiger Definition aufgelisteten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes wurden von dem russischen Mathematiker Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) formuliert. Kolmogorov gilt als einer der Pioniere der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, leistete jedoch auch bedeutende Beiträge zu zahlreichen anderen Teilgebieten der Mathematik. Informatikern begegnet sein Name auch im Zusammenhang mit der so genannten Kolmogorov-Komplexität, einem relativ jungen Zweig der Komplexitätstheorie.

Die Eigenschaften in obiger Definition nennt man auch Kolmogorov-Axiome.

Lemma 33:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A, B, A_1, A_2, ... gilt

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.

5. (Additionssatz) Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind, so folgt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse A, B erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B].$$

Für eine unendliche Menge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$.

Beweis: Wenn wir in Eigenschaft (W2) $A_1 = \Omega$ und $A_2, A_3, \ldots = \emptyset$ setzen, so ergibt die Eigenschaft, dass $\Pr[\Omega] + \sum_{i=2}^{\infty} \Pr[\emptyset] = \Pr[\Omega]$. Daraus folgt $\Pr[\emptyset] = 0$.

Regel 2 und Regel 5 gelten direkt nach Definition der Kolmogorov-Axiome und Regel 1.

Regel 3 erhalten wir mit Regel 5 wegen $1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A] + \Pr[\bar{A}]$.

Für Regel 4 betrachten wir die disjunkten Ereignisse A und $C := B \setminus A$, für die gilt, dass $A \cup B = A \cup C$. Mit Regel 5 folgt die Behauptung. *q. e. d.*

Lebesgue-Integrale

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge A die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f \,\mathrm{d}\,\lambda$, zuordnen.

Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine messbare Funktion, so definiert

$$\Pr : A \mapsto \int f \cdot I_A \, \mathrm{d}\,\lambda$$

eine Abbildung auf den Borel'schen Mengen, die die Eigenschaft (W2) der Kolmogorov-Axiome erfüllt. Gilt daher zusätzlich noch $\Pr[\mathbb{R}] = 1$, so definiert f auf natürliche Weise einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, wobei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die Menge der Borel'schen Mengen ist.