SS 2004

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de

Satz 53: (Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten)

Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \pi,$$

wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der Kette bezeichnet.

Beweis: Gemäß Satz 50 existiert eine stationäre Verteilung π. Wir zeigen, dass für beliebige Zustände i und k gilt

$$p_{ik}^{(n)} \to \pi_k \quad \text{für } n \to \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$(q_n)_k = \sum_{i\in S} (q_0)_i \cdot p_{ik}^{(n)} \to \pi_k \cdot \sum_{i\in S} (q_0)_i = \pi_k.$$

$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ sei eine unabhängige Kopie der Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. Für den Prozess $Z_t := (X_t, Y_t)$ ($t \in \mathbb{N}_0$), bei dem die Ketten X_t und Y_t gewissermaßen „parallel" betrieben werden, gilt also

$$\begin{aligned}
&\Pr[(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (j_x, j_y) \mid (X_t, Y_t) = (i_x, i_y)] \\
&= \Pr[X_{t+1} = j_x \mid X_t = i_x] \cdot \Pr[Y_{t+1} = j_y \mid Y_t = i_y] \\
&= p_{i_x j_x} \cdot p_{i_y j_y}.
\end{aligned}$$

$(Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist daher ebenfalls eine Markov-Kette.

Für die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von (i_x, i_y) nach (j_x, j_y) zu gelangen, erhält man analog $p^{(n)}_{i_x j_x} p^{(n)}_{i_y j_y}$, was für genügend großes n gemäß Lemma 51 positiv ist. $(Z_t)_{t_0\in\mathbb{N}}$ ist daher ebenfalls ergodisch.

Wir starten nun Z_t so, dass die Ketten X_t und Y_t in verschiedenen Zuständen i_x bzw. i_y beginnen, und interessieren uns für den Zeitpunkt H, bei dem sich X_t und Y_t zum ersten Mal im gleichen Zustand befinden.

Die Menge der Zustände von Z_t ist gegeben durch $S \times S$. Wir definieren die Menge

$$M := \{(x, y) \in S \times S \mid x = y\}.$$

von Zuständen der Kette Z_t, an denen sich X_t und Y_t „treffen“.

Definieren wir nun die Treffzeit H durch

$$H := \max\{T_{(i_x,i_y),(j_x,j_y)} \mid (i_x, i_y) \in S \times S, (j_x, j_y) \in M\},$$

so folgt aus Lemma 49 und der Endlichkeit der Markov-Kette sofort, dass $\Pr[H < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[H] < \infty$.

Da die weitere Entwicklung der Ketten X_t und Y_t ab dem Zeitpunkt H nur vom Zustand $X_H = Y_H$ und der Übergangsmatrix abhängt, wird jeder Zustand $s \in S_Z$ zu den Zeiten $t \geq H$ von X_t und Y_t mit derselben Wahrscheinlichkeit angenommen. Es gilt also $\Pr[X_t = s \mid t \geq H] = \Pr[Y_t = s \mid t \geq H]$ und somit auch

$$\Pr[X_t = s, t \geq H] = \Pr[Y_t = s, t \geq H]. \tag{4.2.1}$$

Als Startzustand wählen wir für die Kette X_t den Zustand i, während Y_t in der stationären Verteilung π beginnt (und natürlich auch bleibt). Damit erhalten wir für einen beliebigen Zustand $k \in S$ und $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |p_{ik}^{(n)} - \pi_k| &= |\Pr[X_n = k] - \Pr[Y_n = k]| \\ &= |\Pr[X_n = k, n \geq H] + \Pr[X_n = k, n < H] \\ &\quad -\Pr[Y_n = k, n \geq H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|. \end{aligned}$$

Nun können wir (4.2.1) anwenden und schließen, dass

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| = |\Pr[X_n = k, n < H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|.$$

Zur Abschätzung dieses Ausdrucks benutzen wir die Abschätzung

$$|\Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C]| \leq \Pr[A].$$

für beliebige Ereignisse A, B und C (die offensichtlich ist).

Wir erhalten

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| = \Pr[n < H].$$

Da $\Pr[H < \infty] = 1$, gilt $\Pr[n < H] \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten $p_{ik}^{(n)}$ konvergieren für $n \to \infty$ gegen π_k.

q. e. d.

Doppeltstochastische Matrizen

Wie berechnet man die nach Satz 53 (eindeutig bestimmte) stationäre Verteilung, gegen die ergodische endliche Markov-Ketten für jede Startverteilung konvergieren?

Eine Möglichkeit besteht darin, das lineare Gleichungssystem $\pi \cdot P = \pi$ aufzustellen und zu lösen. Für größere Matrizen ist dieses Verfahren allerdings im Allgemeinen sehr aufwendig.

Wir stellen hier einen anderen Ansatz vor.

Definition: Eine $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$ heißt stochastisch, falls alle Einträge p_{ij} nichtnegativ und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i = 0, \ldots, n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich 1, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j = 0, \ldots, n-1,$$

so nennt man P doppeltstochastisch.

Die Übergangsmatrix einer Markov-Kette ist immer stochastisch, und umgekehrt.

Lemma 54:

Ist P eine doppeltstochastische $n \times n$ Matrix, so ist $\pi = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links:

$$\pi = \pi \cdot P.$$

Beweis: Für alle $0 \leq k < n$ gilt:

$$(\pi \cdot P)_k = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i \cdot p_{ik} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} p_{ik}}_{=1} = \frac{1}{n} = \pi_k.$$

q. e. d.

Zusammen mit Satz 53 erhalten wir damit sofort:

Satz 55: Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit doppeltstochastischer Übergangsmatrix gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{t\to\infty} q_t = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right),$$

wobei n die Kardinalität der Zustandsmenge bezeichne.

Beweis: Klar! *q. e. d.*

Beispiel: Anna und Bodo verabreden sich wieder einmal zu einer Partie Poker. Misstrauisch geworden durch ihre Verluste beim letzten Rendezvous verdächtigt Anna mittlerweile ihren Spielpartner, beim Mischen zu mogeln. Um ganz sicher zu gehen, dass die Karten zukünftig auch wirklich gut gemischt werden, schlägt sie folgendes Verfahren vor: Der Stapel mit Karten wird verdeckt hingelegt und dann werden m-mal zwei Karten daraus zufällig ausgewählt und diese vertauscht. Soll Bodo dieser Prozedur zustimmen?

Wir modellieren den oben skizzierten Mischvorgang durch eine Markov-Kette. Als Zustandsmenge S wählen wir alle möglichen Anordnungen der Karten. Identifizieren wir die Karten mit den Zahlen $[n] = \{1, \ldots, n\}$ so besteht S aus der Menge aller Permutationen der Menge $[n]$.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Permutationen $\sigma, \rho \in S$. Nach Definition der Markov-Kette ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{\sigma,\rho}$ genau dann positiv, wenn es $i, j \in [n]$, $i \neq j$, gibt, so dass

$$\rho(k) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{falls } k = i, \\ \sigma(i) & \text{falls } k = j, \\ \sigma(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung i und j zufällig gewählt werden (und es genau $\binom{n}{2}$ solcher Paare i, j gibt), gilt in diesem Fall $p_{\sigma,\rho} = 1/\binom{n}{2}$.

Da man jede Vertauschung zweier Karten durch nochmaliges Vertauschen wieder rückgängig machen kann, sieht man auch sofort ein, dass $p_{\sigma,\rho} = p_{\rho,\sigma}$ gilt. Die Übergangsmatrix P ist also symmetrisch und damit insbesondere auch doppeltstochastisch. Aus Satz 55 folgt somit, dass die Markov-Kette unabhängig von der Startverteilung in die Gleichverteilung konvergiert.

Der von Anna vorgeschlagene Mischvorgang ist also in der Tat sinnvoll: Für $m \to \infty$ konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die sich ergebende Kartenreihenfolge gegen die Gleichverteilung, die Karten sind also bestens gemischt!

(Anmerkung: Man kann zeigen, dass für n Karten bereits $m = O(n \log n)$ Vertauschungen genügen, um einen gut durchmischten Kartenstapel zu erhalten.)

4.3 Prozesse mit kontinuierlicher Zeit

4.3.1 Einführung

Wir betrachten nun Markov-Ketten $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_0^+}$.

Wie beim Übergang von der geometrischen zur Exponentialverteilung können wir uns auch hier einen Grenzprozess vorstellen.

Wie dort folgt, dass die Aufenthaltsdauer im Zustand 0 gemessen in Schritten der diskreten Markov-Kette geometrisch verteilt ist und im Grenzwert $n \to \infty$ in eine kontinuierliche Zufallsvariable übergeht, die exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Den Parameter λ bezeichnen wir auch als Übergangsrate.

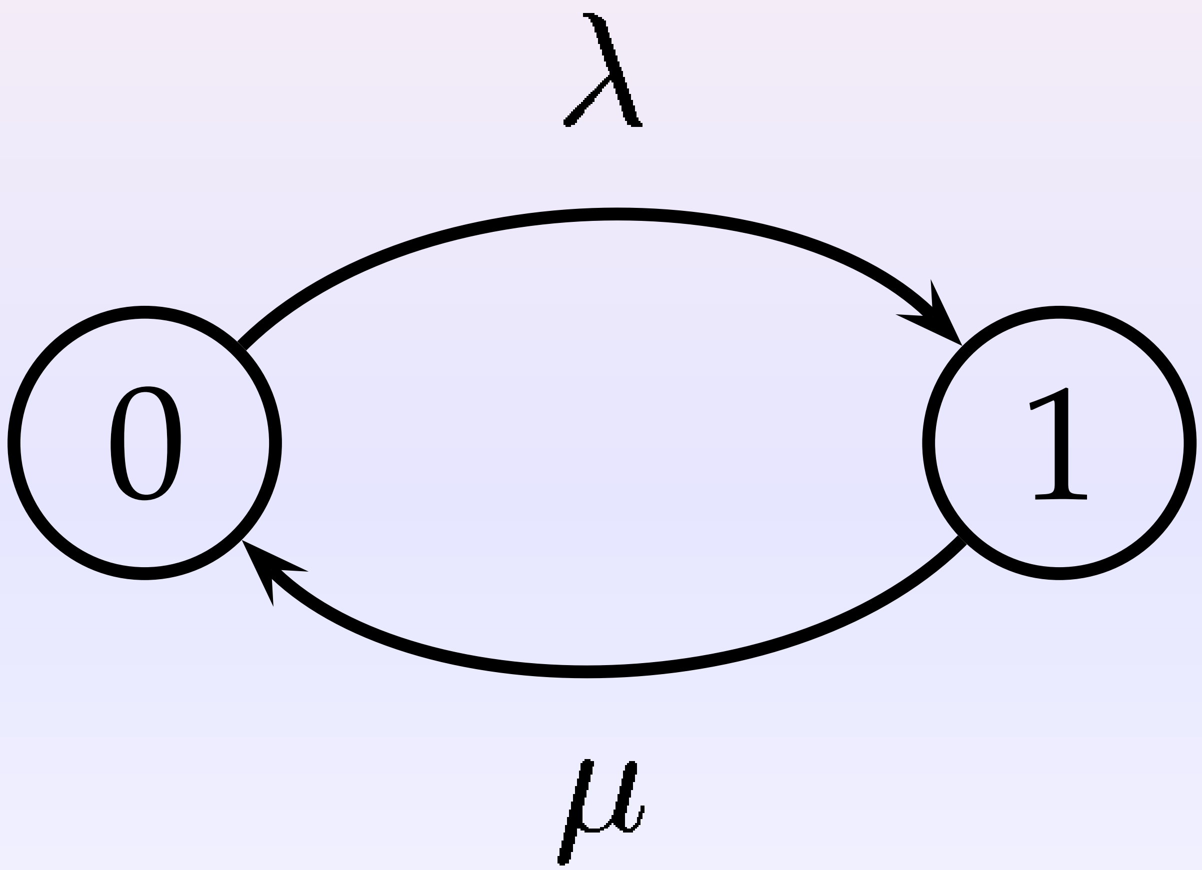

Abbildung 4.1: Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit

Definition:

Eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $X(t)$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ mit Wertemenge S nennen wir (diskrete) Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit, wenn gilt:

- S ist diskret, d.h. wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $S \subseteq \mathbb{N}_0$.
- Die Zufallsvariablen erfüllen die Markovbedingung:
  Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige Zeitpunkte $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ und Zustände $s, s_1, \ldots, s_n \in S$ gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1} \ldots, X(t_0) = s_0] \\ = \Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n]. \qquad (4.3.1)\end{aligned}$$

Eine Markov-Kette heißt zeithomogen, wenn für alle Zustände $i, j \in S$ und für alle $u, t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Pr[X(t+u) = j \mid X(t) = i] = \Pr[X(u) = j \mid X(0) = i]$$

Die Markov-Bedingung (4.3.1) besagt anschaulich Folgendes: Wenn wir den Zustand des Systems zu einer Reihe von Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ kennen, so ist für das Verhalten nach dem Zeitpunkt t_n nur der Zustand zur Zeit t_n maßgebend. Anders formuliert heißt dies: Wenn wir den Zustand des Systems zur Zeit t_n kennen, so besitzen wir bereits die gesamte relevante Information, um Wahrscheinlichkeiten für das zukünftige Verhalten zu berechnen. Die „Geschichte" des Systems, d.h. der „Weg", auf dem der Zustand zur Zeit t_n erreicht wurde, spielt dabei keine Rolle. Eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit ist also ebenso wie eine Markov-Kette mit diskreter Zeit gedächtnislos.

Wie schon bei diskreten Markov-Ketten werden wir uns auch bei Markov-Ketten mit kontinuierlicher Zeit auf zeithomogene Markov-Ketten beschränken und diese Eigenschaft im Folgenden stillschweigend voraussetzen.

Gedächtnislosigkeit der Aufenthaltsdauer

Sei Y die Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Zustand, in dem sich die Markov-Kette zur Zeit $t = 0$ befindet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr[Y \geq t] &= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(0) = 0] \\
&= \Pr[X(t'+u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(u) = 0] \\
&= \Pr[X(t'+u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\
&= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t+u \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\
&= \Pr[Y \geq t+u \mid Y \geq u].
\end{aligned}$$

Die Aufenthaltsdauer Y erfüllt also die Bedingung der Gedächtnislosigkeit und muss daher nach Satz 40 exponentialverteilt sein.

Bestimmung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Wie zuvor bei Markov-Ketten mit diskreter Zeit interessieren wir uns auch bei kontinuierlichen Markov-Ketten für die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das System zur Zeit t in einem bestimmten Zustand befindet. Dazu gehen wir von einer Startverteilung $q(0)$ mit $q_i(0) := \Pr[X(0) = i]$ für alle $i \in S$ aus und definieren die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $q_i(t)$ im Zustand i zum Zeitpunkt t durch $q_i(t) := \Pr[X(t) = i]$.

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten verwenden wir zum einen die soeben gezeigte Tatsache, dass die Aufenthaltsdauer in jedem Zustand i exponentialverteilt sein muss.

Weiter bezeichnen wir mit ν_{ij} die Übergangsrate vom Zustand i in den Zustand j, sowie $\nu_i := \sum_{j \in S} \nu_{ij}$.

Wir betrachten nun ein kleines Zeitintervall $\mathrm{d}t$. Dann ergibt sich die Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesem Zeitintervall als Summe aller „zufließenden“ abzüglich aller „abfließenden“ Wahrscheinlichkeiten. Für alle Zustände $i \in S$ gilt

$$\underbrace{\mathrm{d}q_i(t)}_{\text{Änderung}} = \Big(\underbrace{\sum_j q_j(t) \cdot \nu_{ji}}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{q_i(t)\nu_i}_{\text{Abfluss}} \Big) \cdot \mathrm{d}t. \qquad (4.3.2)$$

Das Lösen des Differentialgleichungssystems (4.3.2) ist meist sehr aufwendig. Wir werden es im Folgenden durch Betrachtung des Grenzwertes für $t \to \infty$ zu gewöhnlichen linearen Gleichungen vereinfachen.

Definition: Zustand j ist von i aus erreichbar, wenn es ein $t \geq 0$ gibt mit $\Pr[X(t) = j \mid X(0) = i] > 0$.

Eine Markov-Kette, in der je zwei Zustände i und j untereinander erreichbar sind, heißt irreduzibel.

Satz 56:

Für irreduzible kontinuierliche Markov-Ketten existieren die Grenzwerte

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} q_i(t)$$

für alle $i \in S$, und ihre Werte sind unabhängig vom Startzustand.

Ohne Beweis.

Wenn für $t \to \infty$ Konvergenz erfolgt, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}q_i(t)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

da sich $q_i(t)$ für genügend große t „so gut wie nicht mehr“ ändert. Diese Gleichung setzen wir in die Differentialgleichungen (4.3.2) ein und erhalten

$$0 = \sum_j \pi_j \nu_{ji} - \pi_i \nu_i$$

für alle $i \in S$.

Dieses Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung $\pi_i = 0$ für alle $i \in S$. Wir suchen jedoch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, und π muss deshalb zusätzlich die Normierungsbedingung $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ erfüllen. Bei Markov-Ketten mit endlicher Zustandsmenge S führt dieses Verfahren immer zum Ziel. Wenn S jedoch unendlich ist, gibt es Fälle, in denen $\pi_1 = \pi_2 = \ldots = 0$ die einzige Lösung darstellt und wir somit keine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten.

4.3.2 Warteschlangen

Für ein System mit m Servern und einer gemeinsamen Warteschlange hat sich die Bezeichnung $X/Y/m$–Warteschlange eingebürgert. Dabei ersetzt man X und Y durch Buchstaben, die jeweils für eine bestimmte Verteilung stehen. Beispielsweise bezeichnet „D“ eine feste Dauer (von engl. deterministic), „M“ die Exponentialverteilung (das M kommt von memoryless, dem englischen Wort für gedächtnislos) und „G“ eine beliebige Verteilung (von engl. general). X gibt die Verteilung der Zeit zwischen zwei ankommenden Jobs an, während Y für die Verteilung der eigentlichen Bearbeitungszeit eines Jobs auf dem Server steht (ohne Wartezeit).

M/M/1–Warteschlangen

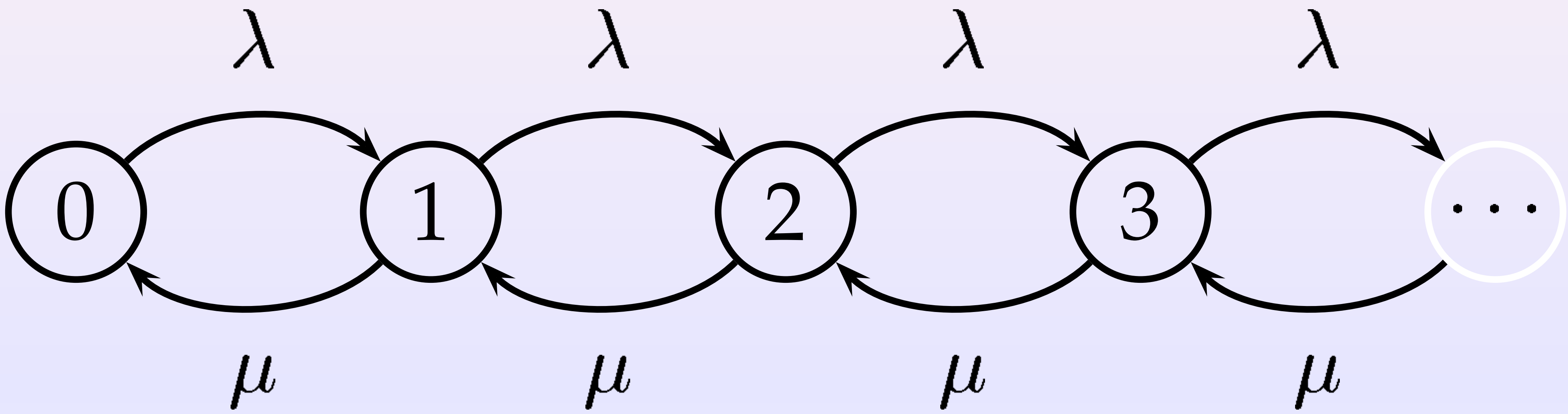

Abbildung 4.2: Modellierung einer M/M/1–Warteschlange

Diese Markov-Kette ist irreduzibel, und im Gleichgewichtszustand gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\pi_{k-1} + \mu\pi_{k+1} - (\lambda+\mu)\pi_k \text{ für alle } k \geq 1 \\ 0 &= \mu\pi_1 - \lambda\pi_0. \end{aligned}$$

Wir definieren die Verkehrsdichte $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ und erhalten:

$$\pi_k = \rho\pi_{k-1} = \ldots = \rho^k\pi_0.$$

Damit:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = \pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\rho^k = \pi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \rho.$$

Dabei haben wir angenommen, dass $\rho < 1$ ist. Für $\rho \geq 1$ konvergiert das System nicht. Da in diesem Fall $\lambda \geq \mu$ gilt, kommen die Jobs schneller an, als sie abgearbeitet werden können. Intuitiv folgt daraus, dass die Warteschlange immer größer wird.

Für $\rho < 1$ erhalten wir als Endergebnis

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$