

3.5 Momenterzeugende Funktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen X haben wir die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für $M_X(s)$ gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.

Beispiel 114

Für eine auf $[a, b]$ gleichverteilte Zufallsvariable U gilt

$$\begin{aligned}M_U(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\&= \left[\frac{e^{tx}}{t(b-a)} \right]_a^b \\&= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}M_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\xi)^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2} .\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wegen $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\&= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma) \cdot \frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\&= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\&= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2}.\end{aligned}$$

Weiterer Beweis von Satz 113:

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Beispiel gilt

$$M_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + (t\sigma_i)^2/2}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der X_i folgt

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{t(a_1X_1 + \dots + a_nX_n)}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{(a_it)X_i}] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_it) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{a_it\mu_i + (a_it\sigma_i)^2/2} \\ &= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2}, \end{aligned}$$

mit $\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$ und $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$. □

4. Zentraler Grenzwertsatz

Satz 115 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \dots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$).

Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Y_n := X_1 + \dots + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für $n \rightarrow \infty$.

Etwas formaler ausgedrückt gilt: Die Folge der zu Z_n gehörenden Verteilungsfunktionen F_n hat die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir sagen dazu auch: Die Verteilung von Z_n **konvergiert** gegen die Standardnormalverteilung für $n \rightarrow \infty$.

Dieser Satz ist von großer Bedeutung für die Anwendung der Normalverteilung in der Statistik. Der Satz besagt, dass sich die Verteilung einer Summe **beliebiger** unabhängiger Zufallsvariablen (mit endlichem Erwartungswert und Varianz) der Normalverteilung umso mehr annähert, je mehr Zufallsvariablen an der Summe beteiligt sind.

Beweis:

Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \dots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\text{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem **Beispiel**)

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \dots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \dots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \text{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$,
und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right) \right)^n \rightarrow e^{t^2/2} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Konvergenz der momenterzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Beweis (Forts.):

Die momenterzeugende Funktion existiert leider nicht bei allen Zufallsvariablen und unser Beweis ist deshalb unvollständig. Man umgeht dieses Problem, indem man statt der momenterzeugenden Funktion die so genannte **charakteristische Funktion** $\tilde{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ betrachtet. Für Details verweisen wir auf die einschlägige Literatur. □

Der Zentrale Grenzwertsatz hat die folgende intuitive Konsequenz:

Wenn eine Zufallsgröße durch lineare Kombination vieler unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen entsteht, so erhält man näherungsweise eine Normalverteilung.

Ein wichtiger Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes besteht darin, dass die auftretenden Zufallsgrößen Bernoulli-verteilt sind.

Korollar 116 (Grenzwertsatz von de Moivre)

X_1, \dots, X_n seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p . Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \dots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zentralen Grenzwertsatz, da $\mu = \frac{1}{n}\mathbb{E}[H_n] = p$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n}\text{Var}[H_n] = p(1 - p)$. □

Bemerkung

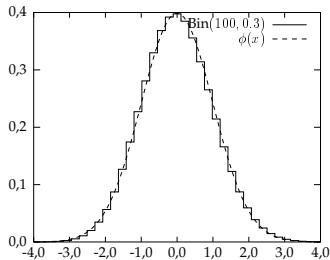
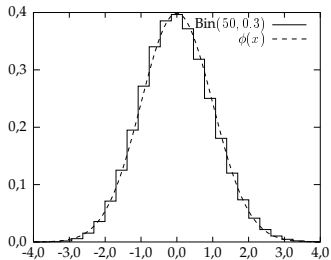
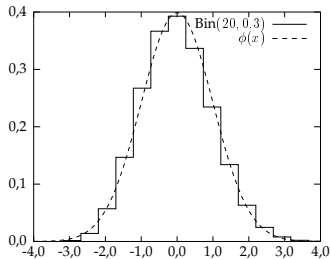
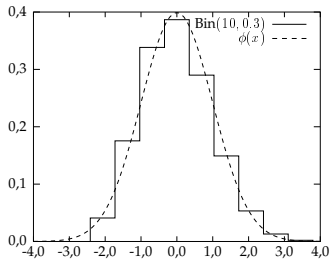
Wenn man X_1, \dots, X_n als Indikatorvariablen für das Eintreten eines Ereignisses A bei n unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes interpretiert, dann gibt H_n die absolute Häufigkeit von A an.

4.1 Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Korollar 116 ermöglicht, die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung aufzufassen. Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Korollar 116:

Korollar 117

Sei $H_n \sim \text{Bin}(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von H_n/n konvergiert gegen $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ für $n \rightarrow \infty$.



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

Historisch gesehen entstand Korollar 116 vor Satz 115.

Für den Fall $p = 1/2$ wurde Korollar 116 bereits von Abraham de Moivre (1667–1754) bewiesen. De Moivre war gebürtiger Franzose, musste jedoch aufgrund seines protestantischen Glaubens nach England fliehen. Dort wurde er unter anderem Mitglied der Royal Society, erhielt jedoch niemals eine eigene Professur.

Die allgemeine Formulierung von Korollar 116 geht auf Pierre Simon Laplace (1749–1827) zurück. Allerdings vermutet man, dass die Lösung des allgemeinen Falls $p \neq 1/2$ bereits de Moivre bekannt war.

4.2 Elementarer Beweis des Grenzwertsatzes von de Moivre für $p = 1/2$

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b]$ für $p = 1/2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Wenn die Verteilung von H_{2n}^* , wie in Korollar 116 angegeben, gegen $\mathcal{N}(0, 1)$ konvergiert, so sollte $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] \approx \int_a^b \varphi(t) dt$ für genügend große n gelten. Wir schreiben $f(n) \sim_{\infty} g(n)$ für $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$, wollen also zeigen:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] \sim_{\infty} \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Da für $H_{2n} \sim \text{Bin}(2n, 1/2)$ gilt, dass $\mathbb{E}[H_{2n}] = n$ und $\text{Var}[H_{2n}] = n/2$ ist, erhalten wir

$$H_{2n}^* = \frac{H_{2n} - n}{\sqrt{n/2}},$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] &= \Pr[n + a\sqrt{n/2} \leq H_{2n} \leq n + b\sqrt{n/2}] \\ &= \sum_{i \in I_n} \Pr[H_{2n} = n + i]\end{aligned}$$

für $I_n := \{z \in \mathbb{Z} \mid a\sqrt{n/2} \leq z \leq b\sqrt{n/2}\}$. Damit ist

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] = \sum_{i \in I_n} \underbrace{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=: p_{n,i}}.$$

Es gilt

$$\max_i p_{n,i} \leq p_n^* := \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

und mit der Stirling'schen Approximation für $n!$

$$p_n^* \sim_{\infty} \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{(n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n})^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ersetzen wir nun die $p_{n,i}$ durch p_n^* so entsteht dabei ein Fehler, den wir mit $q_{n,i} := \frac{p_{n,i}}{p_n^*}$ bezeichnen.

Für $i > 0$ gilt

$$\begin{aligned} q_{n,i} &= \frac{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n!}{(n+i)! \cdot (n-i)! \cdot (2n)!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (n-j)}{\prod_{j=1}^i (n+j)} = \prod_{j=1}^i \frac{n-j+1}{n+j} = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Binomialkoeffizienten gilt $q_{n,-i} = q_{n,i}$, womit auch der Fall $i < 0$ abgehandelt ist.

Man macht sich leicht klar, dass $1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1$ für $x > 0$ gilt. Damit schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \right) &= \sum_{j=1}^i \ln \left(1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \\ &\leq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n+j} \leq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n+i} \\ &= - \frac{i(i+1) - i}{n+i} = - \frac{i^2}{n} + \frac{i^3}{n(n+i)} \\ &= - \frac{i^2}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

da $i = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ für $i \in I_n$.

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln \left(\prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \right) &\geq \sum_{j=1}^i \left(1 - \left(1 - \frac{2j-1}{n+j} \right)^{-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^i \frac{-2j+1}{n-j+1} \geq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n-i} \\ &= -\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$e^{-\frac{i^2}{n-i}} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq q_{n,i} \leq e^{-\frac{i^2}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}$$

Wegen $e^{\pm \mathcal{O}(1/\sqrt{n})} = 1 \pm o(1)$ folgt daraus $q_{n,i} \sim_{\infty} e^{-i^2/n}$.

Damit schätzen wir nun $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b]$ weiter ab:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] = \sum_{i \in I_n} p_n^* \cdot q_{n,i} \sim_{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \sum_{i \in I_n} e^{-i^2/n}}_{=: S_n}.$$

Mit $\delta := \sqrt{2/n}$ können wir die Summe S_n umschreiben zu

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{i \in I_n} \delta e^{-(i\delta)^2 \cdot \frac{1}{2}}.$$

Diese Summe entspricht einer Näherung für

$\int_a^b \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$ durch Aufteilung der integrierten Fläche in Balken der Breite δ . Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Fläche der Balken gegen das Integral, d. h. $S_n \sim_{\infty} \int_a^b \varphi(t) dt$.

q. e. d.