
Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 14. Juli 2006 vor der Zentralübung

Aufgabe 1

Eine Werbeagentur möchte am letzten Tag der Fußballweltmeisterschaft mit einer Blitzumfrage schätzen, welcher Anteil ϑ der per Bahn anreisenden Fußballfans einen Platz im Stadion hat. Jeder der 12 Mitarbeiter befragt so lange zufällig ausgewählte Fans, bis er einen Fan gefunden hat, der eine Karte für das Stadion besitzt. Die Anzahl der vom Mitarbeiter i befragten Fans sei X_i .

Wir nehmen an, dass alle X_i die gleiche geometrische Verteilung besitzen mit

$$\Pr_{\vartheta}[X_i = k] = (1 - \vartheta)^{k-1} \cdot \vartheta, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1. Man bestimme auf der Basis der ermittelten Stichprobenwerte

3, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 5, 3, 2, 3

einen Maximum-Likelihood-Schätzwert für ϑ .

2. Man gebe mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes ein konkretes 95%-Konfidenzintervall für ϑ an.

Aufgabe 2

In einer großen Stadt gibt es N Taxis, die mit den Nummern $1, \dots, N$ beschriftet sind. Wir stehen an der Straße und beobachten die Taxis, dabei notieren wir uns deren Nummer (Wiederholungen werden ignoriert). Sei x_1, \dots, x_n die aufsteigend sortierte Folge der beobachteten Nummern. Nun wollen wir die Anzahl N der Taxis schätzen.

1. Was ist der Maximum Likelihood Schätzer für N ? Ist dieser erwartungstreu?
2. Geben Sie einen Schätzer für die Anzahl der Taxis an, der N dadurch abschätzt, dass er versucht, die Größe der (ev. nicht beobachteten) Lücke $x_n + 1, \dots, N$ oberhalb von x_n abzuschätzen. Ist dieser Schätzer erwartungstreu?

Aufgabe 3

Beim Testen von Hypothesen bezeichnet man die zu überprüfende Hypothese (*Nullhypothese*) generell mit H_0 und die *Alternative* mit H_1 . Ein Tierhändler erhält ein Paket mit 100 Frettchen. Er will testen, ob weniger als zehn (< 10) dieser Frettchen aggressiv und bissig sind. Dazu hält er zehn Frettchen seinen Finger hin und nimmt das Paket nur an, wenn ihn keines davon beißt (wir nehmen an, dass ein aggressives Frettchen sofort zubeißen würde). Wie lauten die Hypothesen des Händlers? Was ist das Signifikanzniveau des Tests?

Aufgabe 4

Sei X eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p . Mit einer Stichprobe von nur 2 Elementen soll die Hypothese $H_0 : p \geq \frac{2}{3}$ getestet werden. Die Testvariable sei $T = X_1 + X_2$, wobei X_1 und X_2 unabhängige Kopien von X sein sollen, d. h., X_1, X_2 sind ebenfalls Bernoulli-verteilt mit gleichem Parameter p . Der Ablehnungsbereich des Tests sei $K = \{0\}$.

1. Geben Sie die Verteilungsfunktion von T an. (Es ist nicht nach der Dichtefunktion von T gefragt!)
2. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art (Signifikanzniveau) α_1 .
3. Wir nehmen an, dass die Alternative $H_1 : p \leq \frac{1}{3}$ echt ist. Dies bedeutet, dass H_1 gelte, wenn H_0 nicht gilt.

Berechnen Sie damit die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art α_2 .