Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Abschlussklausur
2. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....
Hörsaal	**Reihe**	**Sitzplatz**	**Unterschrift**
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Begründen Sie, falls gefordert, im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp.

1. Wie viele Kanten besitzt ein kreisfreier Graph mit n Knoten und 3 Zusammenhangs-Komponenten? Begründung!

2. Gibt es einen Graphen mit Gradfolge $2, 2, 3, 3, 3$ (oder $3, 3, 3, 2, 2$)? Begründung!

3. Welche chromatische Zahl hat ein Baum mit 10 Knoten?

4. Sei S die Menge aller Abbildungen $f : [4] \to [4]$. Es bezeichne $\circ$ die Komposition von Abbildungen. Wir betrachten die Halbgruppe $A = \langle S, \circ \rangle$.

   Geben Sie eine Unteralgebra $\langle U, \circ \rangle$ von A an, die eine Gruppe ist.

5. Gibt es eine endliche Boolesche Algebra, in der das Komplement jedes Atoms stets wieder ein Atom ist? Begründung!

6. Sei $\pi(x)$ ein Polynom aus $\mathbb{Z}_5[x]$, so dass $K = \langle\, Z_5[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \,\rangle$ ein Körper mit 25 Elementen ist. Welchen Grad besitzt $\pi(x)$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als natürliche Zahl in Dezimaldarstellung an oder als Zahlausdruck. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort möglichst knapp.

Wie viele perfekte Matchings besitzt der $K_{3,3}$? ....

Begründung:

Betrachten Sie die Kongruenzrelation $\equiv_{13}$ auf $\mathbb{Z}$.
Sei A die Kongruenzklasse modulo 13, die die Zahl -100 enthält.

Wie viele Elemente $x \in A$ gibt es mit $0 \leq x \leq 100$? ....

Begründung:

Geben Sie die Ordnung des Elementes 8 der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{20}, +_{20} \rangle$ an.

Begründung:

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Bestimmen Sie den Prüfer-Code für den vollständigen Suchbaum mit der Knotenmenge $[15]$!

2. Ein (nicht notwendigerweise vollständiger) Suchbaum $B = ([n], E)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben durch seinen Prüfer-Code mit einer Folge von Zahlen zwischen 1 und 10 wie folgt:

   $$2 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \quad 7 \quad 10 \quad 8 \quad 10\,.$$

   Geben Sie B an, indem Sie n und die Kantenmenge E bestimmen (Zeichnung genügt)!
   Kennzeichnen Sie insbesondere die Baumwurzel!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

1. Sei $G = \langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe mit neutralem Element e und es sei a ein Element in G.

   Zeigen Sie: Falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^{-1} = a^k$, dann ist a in einer endlichen Untergruppe von G enthalten.

2. $\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot_n \rangle$ mit $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n \text{ und } ggT(x, n) = 1\}$ ist bekanntlich eine Gruppe.

   Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_{10}^*, \cdot_{10} \rangle$ zyklisch ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Wir betrachten 6 unterschiedlich weit voneinander entfernte Orte. Wir bezeichnen die Orte durch Wohnung ($W.$), Stadion ($S.$), Rathaus ($R.$), Park ($P.$), Dom ($D.$), Firma ($F.$). Die Entfernungen seien durch ganze Zahlen gegeben, die aus der folgenden Matrix zu entnehmen sind. Fehlende Angaben (–) bedeuten, dass keine direkte Verbindung zwischen den entsprechenden Orten bestehen soll.

	Firma	Dom	Park	Rathaus	Stadion	Entfernung zur Wohnung
Firma	.	45	–	56	10	?
Dom	45	.	25	3	30	
Park	–	25	.	30	22	
Rathaus	56	3	30	.	52	
Stadion	10	30	22	52	.	
Wohnung	–	18	20	10	60	.

Im Folgenden gehen wir abstrakt davon aus, dass durch die bisherige Aufgabenstellung ein Graph $G = (V, E)$ mit 6 Knoten und 13 gewichteten Kanten gegeben ist. Es wird empfohlen, G zunächst zeichnerisch darzustellen.

Es ist nun mit dem Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung (Länge des kürzesten Pfades) zwischen Wohnung und Firma zu berechnen. Die Berechnung ist so zu protokollieren, dass daraus die sukzessiv berechnete Folge $u_1, u_2, \ldots$ der Entfernungen von Wohnung zu den anderen Orten hervorgeht. Sie können die oben gegebene Tabelle zur Protokollierung geeignet nutzen.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Mit $R = \langle \mathbb{Q}[x], +, \cdot \rangle$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.
Seien $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1\,, \\ b(x) &= x^3 + 2x^2 - 1\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= a(x) - q_1(x) \cdot b(x)\,, \\ r_3(x) &= b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x)\,. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t(x) \in \mathbb{Q}[x]$ möglichst hohen Grades, das ein gemeinsamer Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ ist.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $\pi(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Wir betrachten den endlichen Ring $R = \langle\, \mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \,\rangle$. Sei E die Menge aller Elemente von $\mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}$, die ein inverses Element bezüglich der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$ besitzen.

1. Zeigen Sie, dass $E' = E \cup \{0\}$ abgeschlossen ist unter der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$, d. h. $p, q \in E' \Rightarrow p \cdot_{\pi(x)} q \in E'$.
2. Bestimmen Sie E ! (Es wird eine Begründung verlangt!)

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die Nullteiler von R vorab zu bestimmen.
3. Zeigen Sie, dass E' nicht abgeschlossen ist unter der Addition $+_{\pi(x)}$, d. h. keinen Unterring von R bildet!
