Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Mittelklausur
15. Dezember 2007

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 105 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ □□
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1, Punktsumme bleibt nichtnegativ).

Für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\emptyset)$ gilt $\lvert\mathcal{P}(\emptyset)\rvert = 0$.	J | N
In der Aussagenlogik gibt es Aussagen, die weder wahr noch falsch sind. ...	J | N
Für alle Prädikate $P(x)$ ist die folgende Aussage stets wahr: $\forall x : (P(x) \Rightarrow \exists y : P(y))$.	J | N
Die Menge der reellen Zahlen $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$ ist nicht abzählbar.	J | N
Sei $n \geq k \geq 0$. Für eine n-elementige Menge gibt es ebenso viele k-elementige Teilmengen wie es $(n-k)$-elementige Teilmengen gibt	J | N
Ein bipartiter Graph kann keinen vollständigen Teilgraphen enthalten.	J | N

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als natürliche Zahl in Dezimaldarstellung an oder als Zahlausdruck.

Berechnen Sie die Anzahl der Partitionen einer
4-elementigen Menge natürlicher Zahlen! .... ☐

Wir betrachten bijektive Abbildungen f der Menge $[5]$ in sich mit der Eigenschaft, dass es zu f 2 Elemente $x \in [5]$ gibt mit $f(x) = x$.
Wie viele solche Abbildungen gibt es? .... ☐

Wie viele Wörter $w \in \{a, b, c\}^*$ der Länge 4 gibt es, in denen
jeder der 3 Buchstaben höchstens zweimal vorkommt? .... ☐

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir Ordnungsrelationen $R \subseteq M \times M$ über einer nichtleeren Menge M. Zur Vereinfachung der Schreibweise für $(a, b) \in R$ wollen wir $a \trianglelefteq b$ schreiben. Wir sagen, dass R die *min*-Eigenschaft besitzt, falls gilt

$$\forall x \in M\colon\ \exists y \in M\colon\ \forall z \in M\colon\ z \trianglelefteq x \Rightarrow y \trianglelefteq z\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Ordnungsrelation $\leq$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die *min*-Eigenschaft besitzt. (Es gilt bekanntlich $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}_0$)

2. Geben Sie ein Beispiel einer nicht totalen Ordnungsrelation an, die die *min*-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beachten Sie, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ definitionsgemäß $i^0 = 1$ gilt.
Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i^0 + i^1 + i^2) \;=\; \frac{n(n^2+2)}{3}\,.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Für nichtnegative Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, d. h. $g(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist das Landau-Symbol $\omega(g(n))$ definiert als Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \forall c > 0\colon \exists n_0 \in \mathbb{N}_0\colon \forall n \geq n_0\colon\ |f(n)| > c \cdot g(n)\,.$$

Im Folgenden schreiben wir $P(c)$ für die Eigenschaft $(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0\colon \forall n \geq n_0\colon\ |f(n)| > c{\cdot}g(n))$, so dass gilt $f(n) \in \omega(g(n)) \iff \forall c > 0\colon\ P(c)$.

1. Geben Sie eine Prädikatenlogische Formel der Form $(\exists c > 0 : Q(c))$ an für die Eigenschaft $f \notin \omega(g(n))$. Der Verneinungsoperator $\neg$ soll in dem Ausdruck $Q(c)$ nicht vorkommen.

2. Beweisen Sie durch Angabe eines $c > 0$ mit Eigenschaft $\neg P(c)$, dass $n(n^2{+}5) \notin \omega(n^3)$ gilt!

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein gleichseitiges Dreieck lässt sich von seinem Mittelpunkt aus in 3 deckungsgleiche gleichschenklige Teildreiecke zerlegen, die 2 Winkel von je 30 Grad und einen Winkel von 120 Grad besitzen.
Wir konstruieren nun Spielsteine in Gestalt gleichseitiger Dreiecke, indem wir 3 der genannten deckungsgleichen gleichschenkligen Dreiecke nehmen, jedes der Dreiecke rot, grün oder blau färben und zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen.

1. Wie viele verschiedene Spielsteine lassen sich konstruieren, wenn Teildreiecke genau dann unterscheidbar sind, wenn sie nicht gleich gefärbt sind, und zwei Spielsteine genau dann gleich sind, wenn sie durch Verschiebung und Drehung zur Deckung gebracht werden können. Vorder und Rückseite der Spielsteine sind also unterscheidbar und dürfen nicht vertauscht werden.

2. Wir gehen nun davon aus, dass Vorder- und Rückseite nicht unterscheidbar sind. Wir lassen beim Vergleich der Spielsteine jetzt zu, dass die Steine umgedreht werden.

   Wie viele verschiedene Spielsteine können nun konstruiert werden, wenn $n \geq 3$ Farben zugelassen werden? Geben Sie eine Berechnungsformel an!

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Bekanntlich werden die vollständigen bipartiten Graphen mit $K_{\{n,m\}}$ bezeichnet, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Wir legen durch Definition fest, dass bipartite Graphen $G = (V, E)$ stets **mindestens eine Kante** besitzen, E also nicht leer ist.
Ein Knoteninduzierter Teilgraph von G ist ein Graph $G' = (V', E')$, so dass $V' \subseteq V$ und $E' = \{\, \{v, w\} \in E \mid v, w \in V' \,\}$.

1. Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Anzahl aller bipartiten Knoteninduzierten Teilgraphen eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{\{n,m\}}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Überlegen Sie, welche Teilmengen keinen bipartiten Graphen induzieren.

2. Ein Teilgraph eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$, so dass $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

   Wie viele bipartite Teilgraphen $G' = (V', E')$ von $K_{\{n,m\}}$ mit gleicher Knotenmenge ($|V'| = n+m$) gibt es? Geben Sie eine Formel zur Berechnung der gesuchten Anzahl an!
