Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Wiederholungsklausur
9. April 2008

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 200 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ	Korrektor
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Begründen Sie, falls gefordert, im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp.

1. Ist die Menge der Funktionen von $\{0, 1\}$ in $\mathbb{Q}$ abzählbar?
2. Gilt $o(n^2) \subseteq \mathcal{O}(n)$?
3. Gibt es für jede nichtleere Menge M eine Relation $R \subseteq M \times M$ mit der Eigenschaft $(\forall x, y \in M : \ R(x, y) \Rightarrow \neg R(x, y))$? Begründung!
4. Gibt es über der 3-elementigen Menge [3] mehr Äquivalenzrelationen im Vergleich zur Anzahl totaler Ordungsrelationen über [3]? Begründung!
5. Ist die symmetrische Gruppe S_3 kommutativ? Begründung!
6. Enthält jeder 3-reguläre Graph einen Kreis? Begründung!
7. Sind alle 3-elementigen Ringe zueinander isomorph? Begründung!
8. Ist der Ring Z_9 ein Körper? Begründung!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als natürliche Zahl in Dezimaldarstellung an oder als Zahlausdruck. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort möglichst knapp.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 verschiedene Münzen auf höchstens 5 nicht unterscheidbare Beutel zu verteilen? ....

Begründung:

Wie viele vollständige planare Teilgraphen besitzt der K_7? ....

Begründung:

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Bestimmen Sie $(n!) \bmod (2n)$. ....

Begründung:

Berechnen Sie $\mathrm{ord}(4)$ in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_9^*$. ....

Begründung:

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Stirlingzahlen zweiter Art $S_{n,k}$ erfüllen bekanntlich die Rekursionsgleichung $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Als Randbedingungen gelten $S_{0,0} = 1$ und $S_{n,0} = 0$, $S_{0,k} = 0$ alle $k, n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten speziell für $k = 1$ und $k = 2$ die folgende Gleichung.

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} S_{i,k-1} \,.$$

1. Zeigen Sie die obige Gleichung für $k = 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere durch Anwendung der gegebenen Rekursionsgleichung und Randbedingungen.

2. Zeigen Sie die obige Gleichung für $k = 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion über n. Dabei dürfen die Gleichungen $S_{n,k} = 0$ für $k > n$ als schon bewiesen vorausgesetzt werden.

   Hinweis: Es ist von Vorteil, die Binomische Formel in geeigneter Weise zu benutzen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $B = \langle\{F,T\},\wedge,\vee,\neg\rangle$ die Boolesche Algebra über den Wahrheitswerten F für „falsch" und T für „wahr" mit den Operationen $\wedge$ („und"), $\vee$ („oder") und $\neg$ („nicht"). Wir definieren eine kommutative Operation $\perp$ („ungleich") für alle $x, y \in \{F,T\}$ durch die Gleichung

$$x \perp y \;=\; (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)\,.$$

1. Zeigen Sie mit Fallunterscheidung der Werte von y die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $x, y, z \in \{F,T\}$.
$$x \perp (y \perp z) \quad = \quad z \perp (y \perp x)\,.$$

2. Zeigen Sie mit Umformungsregeln nach Gesetzen der Booleschen Algebra die Gültigkeit der Gleichungen
$$\neg x \,\wedge\, (y \perp x) \;=\; \neg x \wedge y \qquad \text{und} \qquad x \,\wedge\, \neg(y \perp x) \;=\; x \wedge y\,. \tag{1}$$

3. Zeigen Sie nun unter Verwendung der vorausgegangenen Gleichungen (1) für alle $x, y \in \{F,T\}$
$$x \perp (y \perp x) \quad = \quad y\,.$$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Die Menge M aller Abbildungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in $\mathbb{R}$ bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen bekanntlich ein Monoid $\langle M, \circ \rangle$.
Wir betrachten die Teilmenge S aller speziellen Abbildungen $F_{a,b}(x)$ aus M, die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert sind durch die Gleichung

$$F_{a,b}(x) = a \cdot x + b\,.$$

1. Bestimmen Sie für alle $F_{a,b}$ und $F_{c,d}$ die reellen Zahlen e, f, so dass gilt

   $$F_{e,f} = F_{a,b} \circ F_{c,d}\,.$$

   Begründen Sie, warum $\langle S, \circ \rangle$ eine Unteralgebra von $\langle M, \circ \rangle$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ ein Monoid ist.

3. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe ist.
   Ist $\langle S, \circ \rangle$ kommutativ?

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Wir betrachten einen Wurzelbaum $B = ([n], E)$ mit der Wurzel 1 und dem Prüfer-Code

$$P \;=\; 1 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \quad 3 \quad 1\,.$$

1. Bestimmen Sie die Kantenmenge E! (Zeichnung genügt)

2. Wir verlängern die Zahlenfolge P um k Einsen, d. h. wir betrachten

   $$P_k = P \circ 1^k = P\,1\ldots1$$

   mit $\circ$ als Konkatenation. Es sei B_k der durch P_k als Prüfer-Code gegebene Graph. Begründen Sie, warum B für alle k ein Teilgraph ist von B_k.

3. Geben Sie den Graph B_k an, der durch P_k gegeben ist.
   (Es genügt eine entsprechende schematische Zeichnung)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Wir betrachten Kosten für die Bahnreise zwischen je zwei der 6 Hauptstädte M, B, P, R, Z und W. Die Kosten in ganzen Zahlen für die direkte Bahnverbindung von einer Stadt zu einer anderen seien durch die folgende Matrix gegeben. Fehlende Angaben (–) bedeuten, dass keine direkte Bahnverbindung zwischen den entsprechenden Städten bestehen soll.

	M	B	P	R	Z	W
M	.	44	–	56	10	41
B	44	.	25	3	30	18
P	–	25	.	30	22	20
R	56	3	30	.	52	11
Z	10	30	22	52	.	37
W	41	18	20	11	37	.

1. Durch die obige Kostenmatrix ist ein Graph $G = (V, E)$ mit 6 Knoten und gewichteten Kanten gegeben.

   Stellen Sie G zeichnerisch dar!

2. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum. Die Berechnung ist so zu protokollieren, dass daraus die sukzessiv berechnete Folge $e_1, e_2, \ldots$ der Kanten des Spannbaums hervorgeht.

3. Wie groß sind die minimalen Gesamtkosten einer Rundreise, die alle Städte besucht, wenn für jede direkte Fahrt von Stadt A nach Stadt B eine Rückfahrt von B nach A kostenlos ist?

   Begründen Sie Ihr Ergebnis!

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Mit $R = \mathbb{Z}_3[x]$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ der ganzen Zahlen modulo 3.
Seien $a(x), b(x) \in R$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} a(x) & = & x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,, \\ b(x) & = & x^3 + x^2 + 1\,. \end{array}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in R$ mit $\mathrm{grad}(r_3(x)) < \mathrm{grad}(r_2(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{array}{rcl} r_2(x) & = & a(x) - q_1(x) \cdot b(x)\,, \\ r_3(x) & = & b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x)\,. \end{array}$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t(x) \in R$ möglichst hohen Grades, das ein gemeinsamer Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ ist.

3. Wir betrachten den Ring $R_{b(x)} = \mathbb{Z}_3[x]_{b(x)}$ der Polynome aus R modulo $b(x)$. Zeigen Sie $x^8 \equiv 1 (\bmod\, b(x))$.

   Geben Sie in $R_{b(x)}$ das inverse Element zu x^2 an.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Die Menge der Permutationen der Menge $[n]$ von natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Algebra, die wir bekanntlich die Symmetrische Gruppe S_n nennen.

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i aus S_5

$$p_1 = (1\ 5\ 4)\,, \qquad p_2 = (2\ 5\ 1)\,, \qquad p_3 = (3\ 5\ 2) \qquad p_4 = (4\ 5\ 3)\,.$$

Die Abbildungen p_i sind hier in der Zyklenschreibweise angegeben, wobei Zyklen der Länge 1 weggelassen wurden. Beispielweise gilt $p_1(3) = 3$ und $p_4(2) = 2$.
Sei

$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4\,.$$

1. Geben Sie p als Liste von Paaren $(x, p(x))$ an.
2. Stellen Sie $q = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ als Komposition einer Auswahl von 2 Abbildungen aus $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dar.
3. Geben Sie p als Komposition von disjunkten zyklischen Permutationen an.

   Hinweis: Permutationen $s \in S_n$ und $t \in S_n$ heißen disjunkt, falls für alle $x \in [n]$ gilt $s(x) = x$ oder $t(x) = x$.
4. Bestimmen Sie die Ordnung $\mathrm{ord}(p_1 \circ p_4)$.
