Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 1
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 30. Oktober **vor** *der Vorlesung*

Vorbemerkung: Hausaufgaben sollen grundsätzlich eine Lernkontrolle darstellen für den in vorausgegangenen Tutoraufgaben oder selbständig bereits durchgearbeiteten Stoff. Hausaufgaben haben insofern auch Wiederholungscharakter. Auf dem ersten Übungsblatt allerdings greifen die Hausausgaben naturgemäß auf Stoff zurück, der Schulstoff ist oder in Vorkursen erworben wird. Der verbleibende Stoff sollte in anderen Quellen nachgeschlagen werden. Beachten Sie auch, dass einige Bezeichnungen indirekt durch den Kontext definiert werden. Einfache mengentheoretische Bezeichnungen werden ebenfalls vorläufig als bekannt vorausgesetzt und in nachfolgenden Blättern noch einmal wiederholt.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die natürliche Zählung beginnt bei 1 und kann beliebig fortgesetzt werden. Sie durchläuft die unendliche Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Wir verwenden die Bezeichnungen $\mathbb{N}_0$ für die um die Zahl 0 erweiterte Menge $\mathbb{N}$, und $\mathbb{Z}$ für die $\mathbb{N}_0$ umfassende Menge der ganzen Zahlen. Wir setzen die $\mathbb{Z}$ umfassende Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und deren Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) als bekannt voraus, aus der Schule oder eigener Recherche.

1. Ist 1 ein Teiler von 5? Ist 1 eine Primzahl? Was ist der größte gemeinsame Teiler von 1001 und 1002 ($= ggT(1001, 1002)$)? Welchen Wert besitzt $ggT(120, 306)$?

2. Jede positive rationale Zahl kann bekanntlich durch einen Bruch $\frac{a}{b}$ dargestellt werden, wobei a und b natürliche Zahlen bedeuten. a heißt Zähler und b heißt Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$.

   Geben Sie eine Regel an, die definiert, wann zwei Brüche die gleiche positive rationale Zahl darstellen! Welche Rolle kann dabei der ggT von Zähler und Nenner eines Bruchs spielen? Geben Sie eine Regel an zur eindeutigen Darstellung einer positiven rationalen Zahl als Bruch!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Für rationale Zahlen ist eine Ordnungsbeziehung $<$ definiert. Überlegen Sie, wann $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$!

1. Geben Sie für solche Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ einen Bruch $\frac{x}{y}$ an, so dass $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ gilt!

2. Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht.
   Hinweis: Eine (geordnete) Menge heißt dicht, wenn zwischen je zwei Elementen der Menge unendlich viele weitere Elemente der Menge liegen.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Einst könnte sich die folgende Geschichte zugetragen haben:
Cantor stand vor einer Menge von Menschen und wurde gefragt, ob diese Menge gleich viele Männer wie Frauen enthalten würde. Cantor hatte wenig Lust, Männer einerseits sowie Frauen andererseits zu zählen. Er rief die Menschen dazu auf, jeweils irgendeinen andersgeschlechtlichen Partner an die Hand zu nehmen, und bat diejenigen hervorzutreten, die leer ausgegangen waren.
Wir lernen daraus, dass Mengen dann gleich groß sind, wenn sich deren Elemente mit einer gewissen Vorschrift paarweise zuordnen lassen.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen gleich groß sind, indem Sie eine Vorschrift angeben, wie man alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nacheinander durchlaufen kann!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass es eine $\mathbb{Q}$ umfassende Menge $\mathbb{R}$ reeller Zahlen gibt, so dass es für alle positiven rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets eindeutig eine positive Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$ gibt. y heißt dann die n-te Wurzel aus x, i. Z. $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Zeigen Sie, dass $5^{\frac{1}{2}}$ (Quadratwurzel aus 5) keine rationale Zahl ist! Haben Sie damit schon gezeigt, dass $\mathbb{R}$ eine „größere" Menge ist als $\mathbb{Q}$?

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Versuchen Sie, selbst zu erarbeiten, was es heissen könnte, dass eine Menge A „kleiner" ist als eine Menge B.

1. Warum läßt sich behaupten, dass die Menge $\mathbb{Q}$ nicht „größer" sein kann als $\mathbb{N}$?
2. Ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen „kleiner" als $\mathbb{N}$? Begründung!

Vorbereitung 2

Alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ besitzen eine Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, d_1d_2d_3 \ldots d_nd_{n+1} \ldots$. Die Ziffern d_i bezeichnen dabei natürliche Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Um Eindeutigkeit zu erzielen, verlangt man, dass es keinen Index j gibt, so dass für alle $i > j$ $d_i = 9$ gilt.

Erarbeiten Sie eine Vorschrift für die Addition von Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$, die als unendliche Dezimalbrüche gegeben sind.

Tutoraufgabe 1

Beweisen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist.

Tutoraufgabe 2

Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (B \wedge C)\,.$$

Tutoraufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über boolsche Ausdrücke. Diskutieren Sie dabei unterschiedliche Beweismethoden.

1. $p \Leftrightarrow q$ und $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sind äquivalent.
2. $p \Leftrightarrow q$ und $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sind äquivalent.
3. $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg q$ ist eine Tautologie.
4. $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ ist eine Tautologie.
5. $p \Rightarrow q$ ist äquivalent zu $\neg q \Rightarrow \neg p$.
6. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ist eine Tautologie.
7. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ und $p \Rightarrow (q \wedge r)$ sind äquivalent.