Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 3
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 13. November **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir untersuchen die Inferenzregel der Resolution.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln
$$(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee R)\,.$$
2. Widerlegen Sie die Umkehrung
$$(P \vee R) \Rightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien A, B, C, D, E beliebige Aussagen, für die die Prämissen $\neg A \wedge B$, $C \Rightarrow A$, $\neg C \Rightarrow D$ und $D \Rightarrow E$ gültig sind. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln die Gültigkeit der Konklusion
$$(\neg C \wedge D) \wedge E\,.$$
Protokollieren Sie die Anwendungen der Inferenzregeln.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten Prädikate $A(x)$ und $B(x)$, für die wir die Aussagen $(\exists x)(A(x))$ und $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ als Prämissen annehmen wollen. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln für Quantoren die Gültigkeit der Konklusion
$$(\exists x)(B(x))\,.$$
Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung gegebenen Beispiel und protokollieren Sie die Herleitungsschritte.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Funktion: $f(n) := f(n-1) + 2n - 1$ für $n \geq 2$ und $f(1) = 1$.

1. Werten Sie $f(2), f(3), \ldots, f(8)$ aus!
2. Geben Sie eine geschlossene Form (arithmetischen Ausdruck) für $f(n)$ an!
3. Beweisen Sie Ihre in 2. gemachte Annahme mittels vollständiger Induktion!

***Hinweis:** Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die Potenzmenge einer Menge A ist definiert als die Menge aller Teilmengen von A, formal $\mathcal{P}(A) = \{x \,|\, x \subseteq A\}$. $\mathcal{P}(A)$ enthält somit sowohl die leere Menge $\emptyset$ als auch die Menge A selbst.

1. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A := \{a, b, c, d\}$. Wieviele Elemente hat diese Potenzmenge?

2. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A := \{1, 2, 3\}$. Wieviele Elemente hat diese Potenzmenge?

Vorbereitung 2

Unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen A, B, notiert $A \times B$, versteht man die Menge aller Zwei-Tupel von Elementen aus A und B:

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}\,.$$

1. Berechnen Sie das kartesische Produkt von $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{a, b\}$!

2. Gegeben seien zwei Mengen A, B mit $|A| = n \in \mathbb{N}_0$ und $|B| = m \in \mathbb{N}_0$.
   Welche Kardinalität hat $A \times B$?

Vorbereitung 3

Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die weder surjektiv noch injektiv ist!

Tutoraufgabe 1

Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit Zeichen a, b und c gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ. Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq\ \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \; := \; \{(x, y) \mid \exists y_1, y_2 \in \Sigma^* : \; y = y_1 x y_2\}.$$

Dabei bedeutet $y_1 x y_2$ das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1, x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ba \sqsubseteq ccabab$, aber $cb \not\sqsubseteq ccabab$. Beachten Sie, dass Σ^* auch das sogenannte leere Wort ε enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Sei $H := \{x \in \Sigma^* \mid x \sqsubseteq abac\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq\ \cap\ (H \times H)$.

Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3, die die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.

2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv.

3. Die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch.

4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1.

Tutoraufgabe 3

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!