Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 4
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 20. November **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben seien $A = \{a, 23, 42\}$, $B = \{a, 2, 3, \delta, 42\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}$. Wir definieren $D = B \cap (A \cup C)$, $E = D \cap (A \cap B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup B)$.

1. Leiten Sie zunächst eine möglichst einfache Mengengleichung für G her, ohne die Definitionen für A, B und C zu benutzen.

2. Berechnen Sie $|\mathcal{P}(G)|$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Über $M = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Relationen $R_i \subseteq M \times M$,

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(2,3), (3,2), (1,1)\}, \\ R_2 &= \{(1,2), (2,3), (3,3)\}, \\ R_3 &= \{(1,3), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3)\}\,. \end{aligned}$$

1. Welche dieser Relationen sind symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?
   Welche dieser Relationen sind Abbildungen auf den entsprechenden Urbildern?

2. Berechnen Sie R_1^* und R_2^*!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung einer nicht-leeren Menge X in Y. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob für beliebige Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B_1, B_2 \subseteq Y$ stets gilt:

$$\begin{aligned} f(A_1 \setminus A_2) &\supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)\,, \\ f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Komposition $\circ$ zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Äquivalenzrelation und dem Begriff einer Partition.

Ist die leere Relation eine Äquivalenzrelation? Gibt es demnach eine Partition der leeren Menge?

Vorbereitung 2

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

1. Bestimmen Sie alle transitiven Relationen $R \subseteq M \times M$!

2. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen $S \subseteq M \times M$ über M! Welche davon sind total?

3. Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen $T \subseteq M \times M$ über M!

Vorbereitung 3

Für reellwertige Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $o(g(n))$ aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, die ein *kleineres Wachstum* besitzen als g, wie folgt definiert:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)[|f(n)| < \varepsilon \cdot g(n)]\,.$$

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ hat für gegen ∞ strebendes n den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die für alle n den Wert 1 besitzt.

Man zeige unter sorgfältiger Beachtung der Definitionen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Vorbereitung 4

Machen Sie sich mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion ausreichend vertraut, um Folgendes zu zeigen:

$\log_{10} 3$ ist keine rationale Zahl, d. h., ist nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar.

Hinweis: Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q. Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x. Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.
Wir erinnern an folgende Schreibweisen der logarithmischen Funktionen. Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit $\log_b x$ bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige Basen gelten, so schreibt man häufig $\log x$. Die wichtige Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir $\ln x$ bzw. $\lg x$ bzw. $\mathrm{ld}\, x$.

Tutoraufgabe 1

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x,y) \mid y = x+3\}$. Berechnen Sie R^* !

Tutoraufgabe 2

Wir nehmen Bezug auf die Vorbereitungsaufgabe 3. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie:

1. Falls f nur endlich viele Nullstellen besitzt, dann gilt

$$g(n) \in o(|f(n)|) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = 0\,.$$

2. $f(n) \notin o(|f(n)|)$.

Tutoraufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsverhalten, also so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung.

$$f_1(n) = 2^n\,, \qquad f_2(n) = \sqrt{n}\,,$$
$$f_3(n) = n\,, \qquad f_4(n) = (\log n)^2\,.$$