Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 5
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 27. November **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $(f_0, f_1, \dots)$ ist definiert durch:

$$f_0 = 0\,, \quad f_1 = 1\,, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2\,.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)\,.$$

Hinweis: Es gilt $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x + y \geq 17\}$. Wir definieren eine binäre Relation R über M wie folgt.

$$((x,y),(x',y')) \in R \;:\Leftrightarrow\; x \leq x' \wedge y \leq y'\,.$$

1. Zeigen Sie, dass R eine partielle Ordnung über M ist!
2. Ein Element $x \in M$ heißt minimal bezüglich R, wenn es kein Element $y \in M$ gibt mit $y \neq x$ und $(y,x) \in R$. Wie viele minimale Elemente bezüglich R gibt es?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt bekanntlich $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

   $$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [2^n \geq 5 \cdot n^2]\,.$$

2. Geben Sie Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

   $$f(n) \notin o(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|)\,.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Menge der injektiven Abbildungen einer Menge M in eine Menge N bezeichnen wir mit $Inj(M,N)$. Seien M und N endliche Mengen mit $|M| \leq |N|$.

1. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|Inj(M,N)| \;=\; |N| \cdot |Inj(M\setminus\{x\}, N\setminus\{y\})| \,.$$

2. Die Anzahl der Elemente in M bzw. N sei m bzw. n. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N gegeben ist durch

$$n^{\underline{m}} := \prod_{i=1}^{m}(n-i+1).$$

   Hinweis: Mit $\prod_{i=1}^{m}(n-i+1)$ wird das Produkt aller m Faktoren $(n-i+1)$ von $i=1$ bis $i=m$ bezeichnet. Beachten Sie, dass für $m=0$ das "leere" Produkt mit dem Wert 1 definiert ist.

Hausaufgabe 5 (0 Punkte)

Wir bitten um Beantwortung der folgenden Fragen zum Stoff der DS Vorlesung in den Grundlagenabschnitten Logik, Beweise, Mengen und Relationen.

1. War der Stoff
   (a) aus der Schulzeit weitgehend bekannt?
   (b) aus der Schulzeit kaum bekannt?
2. War der Mathematik-Vorkurs zur Vorbereitung der Vorlesungsinhalte
   (a) geeignet?
   (b) nicht geeignet?
3. Sollte der Stoff zukünftig
   (a) gestrafft behandelt werden?
   (b) ausführlicher behandelt werden?
   (c) wieder in gleicher Weise behandelt werden?
4. Sie sind natürlich ausdrücklich ermuntert, Ihren freien Kommentar zu den Fragen abzugeben.

Vielen Dank!

***Hinweis:** Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei M eine nicht leere, endliche Menge und $f : M \to M$ eine bijektive Abbildung. Eine nicht leere Teilmenge S von M nennen wir *stabil (unter f)*, wenn $f(S) \subseteq S$ gilt. Eine stabile Menge S nennen wir einen Zyklus, wenn S keine unter f stabile echte Teilmenge enthält.
Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung $f : M \to M$ die Menge M in Zyklen partitioniert.

Vorbereitung 2

Bei bestimmten Mannschaftsweltmeisterschaften treten in einer Gruppe vier Mannschaften paarweise gegeneinander an, so dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt. Die Siegermannschaft erhält jeweils drei Punkte, die Verlierer null Punkte. Bei einem Unentschieden bekommen beide Mannschaften einen Punkt. Der Tabellenstand ergibt sich aus den summierten Punkten. Nur die erst- oder zweitplazierten Mannschaften können vorrücken. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben, um zu ermitteln, wie viele Punkte eine Mannschaft mindestens haben muß, um vorzurücken.

1. Zu wie vielen Spielen kommt es in einer Gruppe mit n Mannschaften mindestens?
2. Wie viele Punkte hat der Gruppensieger in einer Gruppe mit n Mannschaften mindestens?
3. Wie viele Punkte hat der Gruppenzweite mindestens?

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie:

$$2^{100} \cdot n^2 \in O(n^2)\,, \qquad e^n \in \omega(2^n)\,,$$
$$2^{\sqrt{2\ln n}} \in o(n)\,, \qquad (\ln n)^{\ln n} \in \Theta(n^{\ln\ln n})\,.$$

Tutoraufgabe 2

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\} \subset \mathbb{N}$ mit $|A| = n + 1$.

1. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, deren Summe $2n + 1$ beträgt.
2. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, so dass eine davon die andere teilt.

Tutoraufgabe 3

Beachten Sie im Folgenden, dass die angegebenen Mengen nicht disjunkt sind.
Seien $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, c, e, g, i, k, m\}$ und $C = \{e, f, g, h, i, j, k\}$.
Wie viele Elemente, d. h. Teilmengen, aus $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ gibt es?