Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 6
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 4. Dezember **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 6n\}$ mit $|A| = 2n + 1$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in A$ gibt, die durch 2 oder durch 3 teilbar ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele der Relationen sind nicht Funktionen mit Definitionsbereich M?
2. Wie viele der Relationen sind bijektive Funktionen über M?
3. Wie viele der Relationen sind totale Ordnungen von M?
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen bijektiven Abbildungen, totalen Ordnungen und Permutationen von M?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A. Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall an und begründen Sie diese Formel.
2. Bestimmen Sie den Koeffizienten von t^3xy^4z in $(x + y + z + t)^9$.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Binomische Formel gilt auch, wenn man statt Potenzen fallende Faktorielle verwendet. Beweisen Sie die folgende Gleichung durch Induktion.

$$(x + y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} .$$

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Wieviele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe`)

Vorbereitung 2

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, $2n + 1$ ($n > 1$) ununterscheidbare Bälle in drei verschiedene Boxen (z. B. eine rote, eine grüne und eine blaue Box) zu verteilen, wenn in einer Box maximal $n - 1$ Bälle liegen dürfen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Vorbereitung 3

Wir betrachten die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Partitionen einer n-elementigen Menge in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$S_{0,0} = 1, \quad S_{n,n} = 1. \quad S_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad S_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0\,.$$

2. Die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist aus der Vorlesung bekannt. Studieren Sie die Darstellung der Rekursion bis $n + k = 8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 1$: (a) $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ und (b) $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

Tutoraufgabe 1

1. Wieviele verschiedene Ergebnisse ("Wurfkonstellationen") kann es geben, wenn man mit 8 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Fünf Würfel sind blau und drei Würfel sind grün.

2. Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ANTANANARIVO* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das N genau dreimal vorkommen.)

   Benutzen Sie einen Taschenrechner oder Maple für die Berechnungen!

3. 5 Studenten essen 10 Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 5 Studenten aufzuteilen.

   (a) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind aber voneinander unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wieviele bekommt).

   (b) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind nicht unterscheidbar, und jeder isst mindestens eine Tafel.

   (c) Sie essen 10 unterscheidbare Tafeln und es soll jeder Student genau 2 Tafeln bekommen.

4. Die Quersumme der dekadischen Darstellung einer natürlichen Zahl ist die Summe der Ziffern der Darstellung zur Basis 10, z. B. hat 5404 die Quersumme 13. Wieviele Zahlen zwischen 0 und 9999 mit Quersumme 13 gibt es?

Tutoraufgabe 2

Tante Erna macht Tee und es kommen n Gäste. Es bilden sich wie immer Gruppen und Grüppchen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen.
Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es, wenn Tante Erna zunächst nicht dabei ist?

2. Tante Erna schließt sich nun einer der k Gruppen an. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?

3. Wir nehmen nun an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen bzw. stehen will. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (Erna sei nicht dabei) ?