Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 7
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 11. Dezember **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 2 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

2. Begründen Sie: Es gibt mindestens 4^{n-1} Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus dem Alphabet $\{a, b, c, |\}$, die eine gerade Anzahl von Zeichen '|' enthalten.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat ist eine Zahl zwischen 1 und 8 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   GLOBALISIERUNGSSTRATEGIE

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

3. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1.000.000 gibt es, so dass die Summe der einzelnen Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ ihrer Dezimaldarstellung genau 15 beträgt?

4. Wie viele Binärwörter der Länge n (nur Buchstaben 0 und 1) gibt es, die die Ziffernfolge "01" genau zweimal enthält?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Fahrzeuge auf 8 unterscheidbare Personen zu verteilen?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
3. Wie viele Partitionen einer 10-elementigen Menge gibt es, wenn nur diejenigen Partitionen gezählt werden, die aus 5 Klassen mit je 2 Elementen bestehen?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

In einem Rangierbahnhof gibt es 31 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

(Zusätzlich zur Klausurvorbereitung)
4 Geschwister treten gemeinsam ein Erbe an. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, das Erbe aufzuteilen?

1. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und es ist nicht egal, wer wie viele bekommt.
2. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und sie wollen nur wissen, wie viele Möglichkeiten der Aufteilung in 4 nichtleere Mengen es gibt (ohne Berücksichtigung, wer genau welche Menge bekommt).
3. Sie erben 8 unterschiedliche Goldmünzen und davon soll jeder genau 2 bekommen.

Vorbereitung 2

(Zusätzlich zur Klausurvorbereitung)
Eine Bankreihe in einem Hörsaal hat n nummerierte Plätze. Allerdings dürfen in der Klausur Studenten nicht direkt nebeneinander sitzen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Plätze in einer Reihe so zu besetzen, dass in der Reihe k Studenten sitzen?

Tutoraufgabe 1

Die Zählung der Möglichkeiten, eine Menge in $k \in \mathbb{N}_0$ Klassen zu partitionieren, hängt davon ab, ob die in der Menge enthaltenen Elemente unterscheidbar sind. Wir betrachten Mengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$ nicht unterscheidbaren Elementen. Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen von M in k Klassen.

1. Bestimmen Sie $P_{n,0}$, $P_{n,k}$ und $P_{n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k > n$!
2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $\quad P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten k-Zahlpartitionen und den o. g. Partitionen von Mengen mit nicht unterscheidbaren Elementen.
   Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe, n unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, und der Aufgabe, n nicht unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen.

Tutoraufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass der Graph C_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ bipartit ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Tutoraufgabe 3

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *vollständig*, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind. Ein *(Knoten-)induzierter Teilgraph* G' von G ist ein Graph $G' = (V', E')$, so daß $V' \subseteq V$ und $E' = \{\{v, w\} \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\}$.

1. Wie viele Kanten hat der Graph K_n?
2. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen enthält der K_n?
3. Wie viele Sterne vom Grad k enthält der K_n?
   Ein Stern vom Grad k besteht aus $k+1$ Knoten und k Kanten. Einer der Knoten (die Mitte) hat Grad k, alle anderen Knoten haben Grad 1. "Enthalten sein" bedeutet in diesem Fall, dass man so lange Kanten entfernt, bis ein Stern übrig bleibt.
4. Nun entfernt man eine Kante in K_n. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen gibt es nun?