Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Alexander Krauss

Sommersemester 2008
Übungsblatt 10
23. Juni 2008

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 30. Juni 2008 **vor** *der Vorlesung in die THEO Briefkästen*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ definiert ist durch die Startwerte $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ zusammen mit der Rekursion

$$f(n+1) = n \cdot f(n-1) + f(n-2)\,.$$

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.
2. Ist der Wertebereich von f entscheidbar? Begründung!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei L eine unendliche Sprache, die von einer Turingmaschine M in lexikographischer Ordnung aufgezählt wird (zuerst alle Worter kleinerer Länge in sortierter Reihenfolge).
Zeigen Sie, dass L entscheidbar ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Relation $\to_M$ über der Menge der Konfigurationen einer Turingmaschine M ist entscheidbar.
Zeigen Sie, dass nicht die transitive Hülle $\to_M^*$ nicht für alle M entscheidbar ist.

Hausaufgabe 4

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Zeigen Sie, dass das *Äquivalenzproblem* für Turingmaschinen, also die Menge

   $$EQ = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \varphi_v = \varphi_w\}$$

   unentscheidbar ist.

2. Wir betrachten eine Funktion $opt : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die für jede Turingmaschine eine "optimierte" Turingmaschine liefert, die die kürzestmögliche Kodierung hat, aber die selbe Funktion berechnet:

   $$opt(v) = \min{}_{\prec} \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_v = \varphi_w\}$$

   Dabei ist $\prec$ die lexikographische Ordnung auf Wörtern, und $\min_{\prec}$ findet das (eindeutige) Minimum bezüglich dieser Ordnung.

   Zeigen Sie, dass opt nicht berechenbar ist.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!

2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi entscheidbar. Beweis!

3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar. Zeigen Sie: Σ^* ist reduzierbar auf B, i. Z. $\Sigma^* \leq B$.

Tutoraufgabe 1

Ist es entscheidbar, ob ein

(i) ein LOOP-Programm P (ii) ein WHILE-Programm P

eine Zuweisung $x_{17} := 1$ ausführt? Begründung!

Tutoraufgabe 2

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

   (i) $L_a = L_1 \cup L_2$. (i) $L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}$.

2. Sei L eine rekursiv aufzählbare Menge von Paaren $(x, y) \in M \times M$.

   Zeigen Sie, dass die transitive Hülle von L rekursiv aufzählbar ist.

Vorbereitung 2

Sei Σ ein Alphabet. Ein Paar (l, r) mit $l, r \in \Sigma^*$ nennen wir konsistent, falls l Präfix von r oder r Präfix von l ist. Sei P eine endliche Menge von Tupeln (x, y) mit $x, y \in \Sigma^+$. Dann nennen wir eine Folge von konsistenten Paaren $(l_0, r_0), \ldots, (l_k, r_k)$ eine Berechnung in P, falls es für alle i mit $0 \leq i < k$ ein Paar $(x, y) \in P$ gibt mit $l_i x = l_{i+1}$ und $r_i y = r_{i+1}$, wobei auch $(l_0, r_0) \in P$ gelten soll. Die Berechnung terminiert, wenn $l_k = r_k$ gilt.

1. Machen Sie sich klar, dass es genau dann eine terminierende Berechnung in P gibt, wenn das Post'sche Korrespondenzproblem P lösbar ist.

2. Sei $P = \{(1, 111), (10111, 10), (100, 00)\}$. Geben Sie eine terminierende Berechnung an, die mit $(10111, 10)$ beginnt. Welche Berechnungsschritte sind deterministisch?

3. Warum kann es nur triviale Berechnungen in P geben, wenn für ein bestimmtes n und für alle $(x, y) \in P$ die Längenbedingung $|x| = |y| = n$ gilt?

Tutoraufgabe 3

1. Sei $P = \{(10, 101), (011, 11), (101, 011)\}$. Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem P nicht lösbar ist.

2. Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem über einem Alphabet mit nur einem Symbol entscheidbar ist.