Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Alexander Krauss

Sommersemester 2008
Übungsblatt 12
7. Juli 2008

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 14. Juli 2008 **vor** *der Vorlesung in die THEO Briefkästen*

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Komplementbildung.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $A, B \in \Sigma^*$ Sprachen in NP. Zeigen Sie, dass $A \cup B$, $A \cap B$ und AB ebenfalls in NP liegen.
Überlegen Sie sich hierzu, wie geeignete Zertifikate aussehen (vgl. Satz 5.10).

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten CFG-Empty, das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$
Problem Gibt es ein $w \in L(G)$?

1. Zeigen Sie, dass CFG-Empty $\leq_p$ SAT.
2. Ist CFG-Empty damit NP-vollständig?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und ADD $= \{a^x b^y c^z \in \Sigma^* \mid x + y = z\}$
Zeigen Sie: Wenn es ADD NP-vollständig ist, dann ist $P = NP$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Eine Boolesche Formel F ist in *Disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie die Form

$$F = (l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm})$$

hat. Dabei ist jedes l_{ij} entweder eine Variable oder eine negierte Variable.
Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus an, um festzustellen, ob eine Boolesche Formel in Disjunktiver Normalform erfüllbar ist.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

In Hausaufgabe 1 haben Sie gezeigt, dass P unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Wo liegt das Problem, wenn man versucht, diese Argumentation auf die Klasse NP zu übertragen?

Vorbereitung 2

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann ist das Komplement $\overline{G}$ von G definiert durch $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\} \setminus E$. Wir nennen ein Menge von Knoten $A \subseteq V$ unabhängig, falls keine zwei Knoten aus A über eine Kante verbunden sind. Sei $A \subseteq V$.
Man zeige: A ist unabhängig in G genau dann, wenn A eine Clique ist in $\overline{G}$.

Tutoraufgabe 1

Eine Teilmenge $A \subseteq V$ von Knoten eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ nennt man Knotenüberdeckung von G, wenn alle Kanten von G mit A einen nicht leeren Durchschnitt besitzen. Wir definieren das Problem der KNOTENÜBERDECKUNG wie folgt:

Gegeben Ein Graph G und eine Zahl k.

Problem Gibt es eine Knotenüberdeckung von G mit höchstens k Knoten?

Zeigen Sie, dass das Problem der KNOTENÜBERDECKUNG NP-vollständig ist.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das NULLSTELLEN-Problem:

Gegeben Ein Polynom p über Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Problem Gibt es eine ganzzahlige Nullstelle, also $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(v_1, \ldots, v_n) = 0$?

1. Zeigen Sie, dass das NULLSTELLEN-Problem NP-hart ist, indem Sie eine Reduktion von SAT angeben. Hinweis: Die folgenden Beziehungen könnten dabei nützlich sein:

$$f(x)g(x) = 0 \iff f(x) = 0 \lor g(x) = 0$$
$$f(x)^2 + g(x)^2 = 0 \iff f(x) = 0 \land g(x) = 0$$

2. Wo liegt das Problem bei folgendem "Beweis", dass NULLSTELLEN in NP ist:

> Ein Zertifikat ist genau eine Nullstelle von p, also ein Vektor von Zahlen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}$. Ein Verifikator muss nun lediglich überprüfen, ob $p(v_1, \ldots, v_n) = 0$. Nach Satz 5.10 ist das Problem damit in NP.