# Einführung in die Theoretische Informatik

*Abgabetermin: 5. Mai 2008* **vor** *der Vorlesung*

## Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\texttt{[}, \texttt{]}\}$. Die Familie von Sprachen $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei induktiv wie folgt definiert:

- $\epsilon \in L_0$.
- Wenn $x \in L_n$ und $y \in L_n$, dann ist auch $xy \in L_n$.
- Wenn $x \in L_n$, dann ist $\texttt{[}x\texttt{]} \in L_{n+1}$.
- Wenn $x \in L_n$, dann ist auch $x \in L_{n+1}$.

1. Geben Sie einen DFA an, der $L_3$ akzeptiert.
2. Definieren Sie eine Familie von regulären Ausdrücken $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n$ gilt: $L(r_n) = L_n$.

## Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $L$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L$ bestehe aus allen Wörtern $w$, die sich in Teilwörter $u$ und $v$ mit $w = uv$ zerlegen lassen, so dass $u$ kein Zeichen $c$ und $v$ kein Zeichen $b$ enthalten und jedes Zeichen $b$ oder $c$ höchstens zwischen den Zeichen $a$ auftritt.

1. Geben Sie einen NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ an, der $L$ akzeptiert.
2. Wir definieren $L'$ als Menge aller Wörter aus $L$, in denen alle Vorkommen von $a$ durch das leere Wort $\epsilon$ ersetzt wurden.

   Konstruieren Sie einen NFA zur Sprache $L'$, in dem Sie zunächst $A$ in einen $\epsilon$-NFA $A'$ transformieren, der $L'$ akzeptiert, und anschließend die $\epsilon$-Übergänge mit Verfahren aus der Vorlesung beseitigen.

   Überprüfen Sie Ihr Resultat in geeigneter Weise.

## Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten eine Verallgemeinerung $A = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ eines NFA, die sich von einem NFA nur darin unterscheidet, dass eine Menge von Startzuständen anstatt eines einzigen Startzustands zugelassen wird. Die akzeptierte Sprache ist dann analog definiert durch $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap F \neq \emptyset\}$.

Sei $\epsilon \notin L(A)$. Zeigen Sie, dass es zur Sprache $L(A)$ einen (verallgemeinerten) NFA $A'$ gibt, so dass $|S| = |F| = 1$ gilt.

## Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zustandsübergangsfunktion eines NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$ sei gegeben durch

| $q_i$ | $\delta(q_i, 0)$ | $\delta(q_i, 1)$ |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$ |
| $q_1$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1, q_3\}$ |
| $q_2$ | $\{q_2, q_3\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_3$ | $\{q_0\}$ | $\{q_0\}$ |

1. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen DFA $B$, der $L(A)$ akzeptiert.
2. Geben Sie nun einen DFA $C$ an, der $\overline{L(A)} = \Sigma^* \setminus L(A)$ akzeptiert und lesen Sie an $C$ einen regulären Ausdruck ab für $\overline{L(A)}$.

## Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir bezeichnen die Menge der regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma$ mit $\mathrm{RE}_\Sigma$.

1. Definieren Sie eine rekursive Funktion $\mathit{empty} : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{0, 1\}$, die entscheidet, ob ein regulärer Ausdruck die leere Sprache beschreibt. Zeigen Sie per Induktion, dass Ihre Definition tatsächlich korrekt ist, dass also gilt:
$$\mathit{empty}(\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; L(\alpha) = \emptyset\,.$$
2. Definieren Sie eine Funktion $\mathit{rem} : \mathrm{RE}_\Sigma \to \mathrm{RE}_\Sigma$, für die gilt:
$$L(\mathit{rem}(\alpha)) = L(\alpha) \setminus \{\epsilon\}\,.$$

***Hinweis:*** *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

## Vorbereitung 1

Wir betrachten 3 unterschiedliche Ansätze zum Beweis von Äquivalenzen für reguläre Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, 0, 1\}$.

1. Seien $r$ und $s$ reguläre Ausdrücke. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz durch Rückgriff auf in den Übungen schon bewiesene Gleichungen für Mengen.

$$(r^* s^*)^* \quad \equiv \quad (r \mid s)^* \,.$$

2. Zeigen Sie mit den in den Lemmata 2.26 bis 2.28 der Vorlesung zusammengefassten Rechengesetzen für reguläre Ausdrücke die folgende Äquivalenz mit den Variablen $r$ und $s$ für reguläre Ausdrücke.

$$(\,(rs) \mid r\,)\, r \quad \equiv \quad r\,(\,(sr) \mid r\,)\,. \tag{1}$$

3. Reguläre Ausdrücke über $\Sigma$ mit Variablen aus $V$ können als reguläre Ausdrücke ohne Variablen über der Zeichenmenge $\Sigma_V = \Sigma \cup V$ aufgefasst werden. Damit wirken Variable im Prinzip gleichberechtigt zu den Basiszeichen. Zum Beweis der Äquivalenz (1) hätte deshalb der Beweis von $(\,(01) \mid 0\,)\, 0 \equiv 0\,(\,(10) \mid 0\,)$ genügt.

   Verifizieren Sie diese Vorgehensweise am Beispiel der Äquivalenz (1) für $r = ab$ und $s = bc$ durch Nachrechnen der Korrektheit der Substitution $\sigma(0) = ab$, $\sigma(1) = bc$ angewandt auf $(\,(01) \mid 0\,)\, 0 \equiv 0\,(\,(10) \mid 0\,)$ ohne Benutzung des Substitutionslemmas!

## Vorbereitung 2

Es seien reguläre Sprachen $R_1$ und $R_2$ durch DFA's $A_1$ bzw. $A_2$ gegeben mit dem gemeinsamen Alphabet $\Sigma$.

1. Zeigen Sie durch Benutzung von Sätzen aus der Vorlesung, dass die symmetrische Differenz $R_1 \Delta R_2$ eine reguläre Sprache ist.

2. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der $R_1 \Delta R_2$ akzeptiert.

## Vorbereitung 3

Im Beweis von Satz 2.19 (Satz von Kleene) wurde aus zwei $\epsilon$-NFAs $N_\alpha$ und $N_\beta$ ein $\epsilon$-NFA $N_{\alpha|\beta}$ konstruiert, so dass $L(N_{\alpha|\beta}) = L(N_\alpha) \cup L(N_\beta)$. Konkretisieren Sie diese Konstruktion, indem Sie den Automaten formal (als 5-Tupel) angeben.

## Tutoraufgabe 1

1. Sei $\Sigma = \{1\}$. $\{1^p \mid p \text{ prim}\}$ ist nicht regulär. Beweis!

2. Was lässt sich über die Menge der Pumping-Lemma-Zahlen einer endlichen Sprache $L$ aussagen, wenn nur bekannt ist, wie viele Elemente $L$ enthält?

## Tutoraufgabe 2

Skizzieren Sie ein Entscheidungsverfahren, welches für einen gegebenen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ feststellt, ob $|L(M)| \leq 100$.

## Tutoraufgabe 3

Wir betrachten den DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$, dessen Zustandsübergangsfunktion $\delta$ gegeben ist durch

| $q_i$ | $\delta(q_i, 0)$ | $\delta(q_i, 1)$ |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_1$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $q_1$ | $q_2$ |

Stellen Sie zur Berechnung der Sprachen $L_i = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in \{q_1, q_2\}\}$ ein Gleichungssystem mit entsprechenden Unbekannten $X_i$ für die Sprachen $L_i$ auf und berechnen Sie mit Hilfe des Arden Lemmas alle $X_i$ als reguläre Ausdrücke.