Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Alexander Krauss

Sommersemester 2008
Übungsblatt 5
19. Mai 2008

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 26. Mai 2008 **vor** *der Vorlesung in die THEO Briefkästen*

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Konstruieren Sie systematisch einen regulären Ausdruck für den DFA $M = (\{q_0, \ldots, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ mit folgender Übergangstabelle:

q	$\delta(q,0)$	$\delta(q,1)$
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_2	q_2
q_3	q_1	q_0

Geben Sie auch die regulären Ausdrücke an, die den anderen Zuständen entsprechen.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Konstruieren Sie einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der einen zu q_0 äquivalenten und erreichbaren Zustand $p \neq q_0$ besitzt.
2. Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Ein Zustand q von A heiße Fangzustand, falls von q aus kein Endzustand erreichbar ist. Zeigen Sie, dass alle Fangzustände äquivalent sind.
3. Zeigen Sie, dass zwei Zustände p und q eines DFA genau dann äquivalent sind, wenn $L(p) = L(q)$ gilt.

   Hinweis: $L(p) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, w) \in F\}$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Minimieren Sie den DFA $M = (\{A, \ldots, J\}, \{0,1\}, \delta, A, \{C, F, I\})$ mit folgender Übergangsfunktion:

q	$\delta(q,0)$	$\delta(q,1)$
A	B	E
B	C	F
C	D	H
D	E	H
E	F	I
F	G	B
G	H	B
H	I	C
I	A	E
J	D	A

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

1. Erweitern Sie das Entscheidungsverfahren für die Äquivalenz von regulären Ausdrücken um eine *Gegenbeispielgenerierung*. Falls die Ausdrücke α und β nicht äquivalent sind, soll der Algorithmus also ein Wort $w \in \Sigma^*$ liefern, so dass entweder $w \in L(\alpha)$ und $w \notin L(\beta)$ oder $w \notin L(\alpha)$ und $w \in L(\beta)$.

2. Sei nun $\Sigma = \{a, b, c\}$. Führen Sie das Verfahren am Beispiel der Ausdrücke $(a \mid b)^*$ und $a^* \mid b^*$ konkret durch.
   Hinweis: Für die beiden regulären Ausdrücke dürfen sie ad-hoc einen dazugehörigen NFA hinschreiben, ohne die allgemeine Konstruktion durchzuführen. Alle weiteren Schritte sollten aber streng nach Schema geschehen. So haben Sie die Möglichkeit, die entsprechenden Konstruktionen noch einmal zu üben.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Produktkonstruktion auf zwei DFAs für den Schnitt zweier Sprachen, wie in Satz 2.22 angegeben.
Zeigen oder widerlegen Sie:

"Der Produktautomat von zwei minimalen DFAs ist ebenfalls minimal."

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Die Produktionenmenge P von G bestimmt Relationen $\to_G$, $\to_G^n$ und $\to_G^*$ über $(V \cup \Sigma)^*$ (der Menge der Satzformen der Grammatik G über deren Vokabular $V \cup \Sigma$). Beweisen oder widerlegen Sie ggf. die folgenden Aussagen für die Satzformen $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i, u, v$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

1. $\alpha \to_G \beta \quad \Longrightarrow \quad u\alpha v \to_G u\beta v\,.$
2. $\to_G$ bzw. $\to_G^n$ bzw. $\to_G^*$ sind reflexiv und transitiv.
3. (i) $\epsilon \to_G \alpha\,.$ (ii) $\epsilon \to_G^0 \epsilon\,.$
4. $\alpha_1 \to_G \beta_1 \;\wedge\; \alpha_2 \to_G \beta_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1\alpha_2 \to_G^2 \beta_1\beta_2\,.$
5. $\alpha \to_G \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \to_G^1 \beta\,.$

Beweisen Sie nun den folgenden Spezialfall des Kompositionslemmas der Vorlesung.

6. Es gilt $\alpha_1\alpha_2 \to_G^1 \beta$ genau dann, wenn es Satzformen β_1, β_2 mit $\beta = \beta_1\beta_2$ gibt, so dass gilt
$$\alpha_1 \to_G^0 \beta_1 \;\wedge\; \alpha_2 \to_G^1 \beta_2 \quad \vee \quad \alpha_1 \to_G^1 \beta_1 \;\wedge\; \alpha_2 \to_G^0 \beta_2\,.$$

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Beweisen Sie das folgende Kompositionslemma mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$. für alle Satzformen $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ von G.

$$\begin{aligned}&\alpha_1\alpha_2 \to_G^n \beta \quad \Longleftrightarrow \\ &\qquad \exists \beta_1, \beta_2, n_1, n_2.\quad \beta = \beta_1\beta_2 \;\wedge\; n = n_1 + n_2 \;\wedge\; \alpha_1 \to_G^{n_1} \beta_1 \;\wedge\; \alpha_2 \to_G^{n_2} \beta_2\,.\end{aligned}$$

Vorbereitung 2

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen
$$S \to aT\,, \qquad\qquad T \to Sb \mid Tb \mid b\,.$$

1. Beschreiben Sie $L(G)$ mengentheoretisch möglichst einfach.
2. Beweisen oder widerlegen Sie: (i) $a^2b^4 \in L(G)$. (ii) $a^4b^2 \in L(G)$.

Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

erzeugt und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie:

1. Jede Sprache, die von einer *rechtslinearen* CFG erzeugt wird, ist regulär.
2. Jede Sprache, die von einer *linkslinearen* CFG erzeugt wird, ist regulär.