Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Alexander Krauss

Sommersemester 2008
Übungsblatt 8
9. Juni 2008

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 16. Juni 2008 **vor** *der Vorlesung in die THEO Briefkästen*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine A an, die ein Eingabewort $w \in \{0,1\}^+$ *kopiert*, so dass am Ende der Berechnung ww auf dem Band steht und der Kopf im Endzustand auf dem Anfang von ww steht. Kommentieren Sie Ihre Lösung durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

2. Geben Sie eine Turingmaschine B an, die die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ akzeptiert. Die Berechnungen sollen die Bedingung beachten, dass während der Berechnung nur Eingabefelder beschrieben werden dürfen (lineare Beschränkung). Kommentieren Sie Ihre Lösung durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

„Für jede Turingmaschine gibt es eine Turingmaschine mit nur einem Zustand, die dieselbe Sprache akzeptiert.“

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man die folgende Anweisung durch ein WHILE-Programm simulieren kann: **if** $x_i \neq x_j$ **then** P_1 **else** P_2 **fi** (If-Then-Else) .

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Ein 2-Kellerautomat $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, Z_0', F)$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt. Der zweite Keller wird mit Z_0' initialisiert. Die Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$ beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen): Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe a (auch $a = \epsilon$ ist möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen.

Zeigen Sie: Jede 1-Band-Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ kann durch einen 2-Kellerautomaten $K = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0, Z_0', F')$ simuliert werden.
Hinweis: Bei einer Simulation müssen die Berechnungen bzw. Konfigurationsänderungen zweier Machinen einander zugeordnet werden können und die akzeptierten Sprachen müssen gleich sein.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Geben Sie eine auf den in der Vorlesung definierten Regeln für primitiv rekursive Funktionen basierende Definition an für $\mathit{fak}(n) = n!$.

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

1. $\mathit{twopow}(n) = 2^n$,
2. $\mathit{tower}(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ (d.h. $2^{(2^{(2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}})})}$, Turm der Höhe n),
3. $\mathit{ifthen}(n, a, b)$ mit
$$\mathit{ifthen}(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0\,, \\ b & n = 0\,. \end{cases}$$

Vorbereitung 2

Im Folgenden bezeichne $a(n, m)$ die Ackermann-Funktion.

1. Berechnen Sie $a(1, 6)$ und $a(2, 1)$.
2. Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$:
   (i) $a(1, m) = m + 2$, (ii) $m < a(n, m)$.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

1. (i) $a(n, m) < a(n, m + 1)$, (ii) $a(n, m + 1) \leq a(n + 1, m)$.
2. f mit $f(n, m) = a(n, m) + 2m$ ist nicht primitiv rekursiv.
3. g ist primitiv rekursiv mit
$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a(n, n + 1) > a(n + 1, n + 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Tutoraufgabe 3

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $U_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$U_f(n) = \begin{cases} \min\{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = n\} & \text{falls ein solches } m \text{ existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Wenn f total und μ-rekursiv ist, dann ist auch U_f μ-rekursiv.