Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 1
15. Oktober 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: entfällt

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Wir fassen die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und 4 zu einer Menge A zusammen.

1. Beschreiben Sie A
   (a) extensional,
   (b) intensional,
   (c) als Durchschnitt 5-elementiger Mengen,
   (d) als Vereinigung 3-elementiger Mengen,
   (e) als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen,
   (f) als Komplement einer Menge,
   (g) als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen.

2. Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste.

Vorbereitung 2

Wir fassen die Buchstaben a, b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.

2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b, und b kommt vor c, und insgesamt kommt a auch vor c).

   Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!

3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!

4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Tutoraufgabe 1

(*Wiederholen Sie zunächst kurz die Begriffe und Lösungen zu Vorbereitungsaufgabe 1.*)
Sei U eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge X von U sei $\overline{X} = U \setminus X$ das sogenannte Komplement von X bezüglich U. Seien A und B beliebige Teilmengen von U.

1. Geben Sie ein Beispiel für A, B an, so dass die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nicht gilt. Für welche Mengen A, B gilt die Gleichung?

2. Zeigen Sie $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A_i \subseteq U$ für alle $i \in [n]$. Zeigen Sie für $n = 3$ die Gleichung

   $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\,.$$

   Wie kann man den Beweis dieser Gleichung für $n = 4$ zurückführen auf den Beweis der Gleichung für $n = 3$? Wie kann man diesen Schritt verallgemeinern?

Tutoraufgabe 2

(*Wiederholen Sie zunächst kurz die Begriffe und Lösungen zu Vorbereitungsaufgabe 2.*)
Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3, die die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.

2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv.

3. Die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch.

4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1.

Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung!
In welcher Weise wird das Urbild von R_3 partitioniert?