WS 2009/10

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

13. Januar 2010

ZÜ X VA1 und TA1 Blatt 9

1. Blatt 9, VA 1

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_1, a_2, \ldots, a_{|M|})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

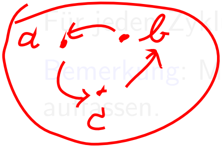
Dann nennen wir die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \quad \text{mit} \quad \pi_z(a_i) = a_{(i \bmod |M|)+1}$$

einen *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π.

Bemerkung: Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.



$z = (b, a, c)$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$\{a, b, c\}$

ZÜ X VA1 und TA1 Blatt 9

1. Blatt 9, VA 1

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_1, a_2, \ldots, a_{|M|})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

Dann nennen wir die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \quad \text{mit} \quad \pi_z(a_i) = a_{(i \bmod |M|)+1}$$

einen *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π.

Bemerkung: Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

Beispiele:

- $M = \{1\}$, $z = (1)$, $\pi_z(1) = 1$.
- $M = \{2, 5, 6\}$, $z = (6, 2, 5)$,

  Extensionaldarstellung: $\pi_z(2) = 5$, $\pi_z(5) = 6$, $\pi_z(6) = 2$,
  gleichbedeutend mit $\pi_z = \{(2, 5), (5, 6), (6, 2)\}$.

  Matrixdarstellung: $\pi_z = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

  Graphische Darstellung:

- Ungewohnte, aber korrekte Darstellung des leeren Zyklus:

  $M = \emptyset$, $z = ()$, $\pi = \emptyset$.

Beispiele:

- $M = \{1\}$, $z = (1)$, $\pi_z(1) = 1$.
- $M = \{2,5,6\}$, $z = (6,2,5)$,

  Extensionaldarstellung: $\pi_z(2) = 5$, $\pi_z(5) = 6$, $\pi_z(6) = 2$,
  gleichbedeutend mit $\pi_z = \{(2,5),(5,6),(6,2)\}$.

  Matrixdarstellung: $\pi_z = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

  Graphische Darstellung:
- Ungewohnte, aber korrekte Darstellung des leeren Zyklus:

  $M = \emptyset$, $z = ()$, $\pi = \emptyset$.

1

- Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
- Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
- Welche verschiedenen Darstellungen hat ${\pi_z}^3$?
- Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus ?

Anwort zu Frage 1:

Ein Zyklus der Länge 3 besitzt genau 3 Darstellungen!

Begründung:
Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$.

Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi(a_2)\,.$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a))\,, \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b))\,, \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c))\,.$$

Man beachte die Definition $\pi^2(x) = \pi(\pi(x))$.

Antwort zu Frage 2:

Die Basis des Zyklus π_z mit $z = (4, 1, 3, 2)$ ist $M_z = \{1, 2, 3, 4\}$.

Für den durch z dargestellten Zyklus $\pi_z : M \to M$ gilt

$$\pi_z(1) = 3\,, \quad \pi_z(2) = 4\,, \quad \pi_z(3) = 2\,, \quad \pi_z(4) = 1\,.$$

Lösung Frage 3:

Für Operationen f über einer Menge M, d.h. $f : M \to M$, gibt es die Möglichkeit der

mehrfachen Hintereinanderausführung der Operation f

mit entsprechenden Schreibweisen.

Wir erinnern an
die Komposition $\circ$ von binären Relationen und Abbildungen in Kapitel II, Grundlagen; Relationen (Folie 30) der Vorlesung.

Es gilt

$$f^2 = f \circ f,$$

und allgemein

$$f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N}\,,$$

d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in M : \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x))\,,$$

insbesondere $f^2(x) = f(f(x))\,.$

Bemerkung:
Man beachte, dass die Schreibweise der Potenzierung f^n durch Hausaufgabe 1 von Blatt 4 gerechtfertigt wurde.

Antwort zu Frage 3:

Sei wieder $z = (4, 1, 3, 2)$.

$\pi = {\pi_z}^3$ ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$\begin{aligned} z_1 &= (1, 4, 2, 3)\,, \quad & z_2 &= (2, 3, 1, 4)\,, \\ z_3 &= (3, 1, 4, 2)\,, \quad & z_4 &= (4, 2, 3, 1)\,. \end{aligned}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} {\pi_z}^3(1) &= {\pi_z}^2(\pi_z(1)) = {\pi_z}^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4\,, \\ {\pi_z}^3(2) &= {\pi_z}^2(\pi_z(2)) = {\pi_z}^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3\,, \\ {\pi_z}^3(3) &= {\pi_z}^2(\pi_z(3)) = {\pi_z}^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1\,, \\ {\pi_z}^3(4) &= {\pi_z}^2(\pi_z(4)) = {\pi_z}^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2\,. \end{aligned}$$

Anwort Frage 4:

${\pi_z}^4$ ist kein Zyklus, weil $|\{(\pi^4)^n(1) \mid n \in \mathbb{N}\}| = 1 \neq 4\,.$
Tatsächlich ist ${\pi_z}^4$ gleich der Identität id.

Es gilt

$$\begin{aligned}
{\pi_z}^4(1) &= \pi_z({\pi_z}^3(1)) = 1\,,\\
{\pi_z}^4(2) &= \pi_z({\pi_z}^3(2)) = 2\,,\\
{\pi_z}^4(3) &= \pi_z({\pi_z}^3(3)) = 3\,,\\
{\pi_z}^4(4) &= \pi_z({\pi_z}^3(4)) = 4\,.
\end{aligned}$$

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind.

Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt

Zyklenpartition.

Dabei bildet die Menge $P_Z = \{M(\pi) \mid \pi \in Z\}$ der Basismengen $M(\pi)$ mit $\pi \in Z$ eine Mengenpartition der Vereinigung

$$M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi) \,.$$

Wir nennen Z eine

Zyklenpartition der Menge $M(Z)$.

Beispiel:

Seien $u = (2, 4, 5), v = (1, 7)$ Zyklendarstellungen der Zyklen π_u, π_v.

Die Basismengen sind $M(\pi_u) = \{2, 4, 5\}$, $M(\pi_v) = \{1, 7\}$.

π_u, π_v sind disjunkt.

Dann ist die Menge $Z = \{\pi_u, \pi_v\}$ eine Zyklenpartition.

Es gilt $P_Z = \{\{2, 4, 5\}, \{1, 7\}\}$.

Es gilt $M(Z) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$.

Z ist eine Zyklenpartition von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$

2

- Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?
- Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!
- Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Antwort zu Frage 1:

Für die Basismengen $M(\pi_{z_i})$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} M(\pi_{z_1}) &= \{2,5\}\,, \\ M(\pi_{z_2}) &= \{1\}\,, \\ M(\pi_{z_3}) &= \{1,2,3,4,5\}\,. \end{aligned}$$

Antwort zu Frage 2:

Es gilt mit extensionaler Auflistung der Funktionswerte

$$\pi_{z_1}(2) = 5\,,\quad \pi_{z_1}(5) = 2\,.$$
$$\pi_{z_2}(1) = 1\,.$$
$$\pi_{z_3}(1) = 5\,,\quad \pi_{z_3}(2) = 1\,,\quad \pi_{z_3}(3) = 2\,,\quad \pi_{z_3}(4) = 5\,,\quad \pi_{z_3}(5) = 4\,.$$

Antwort zu Frage 3:

Offenbar sind die Zyklen in Z nicht paarweise disjunkt.
Für die Basismengen gilt z. B.

$$M(\pi_{z_1}) \cap M(\pi_{z_3}) = \{2, 5\} \neq \emptyset\,.$$

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \to [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls} \quad i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z\,.$$

Beispiel fortgesetzt:

Seien $u = (2,4,5), v = (1,7)$ Zyklendarstellungen der disjunkten Zyklen π_u, π_v.
Die Basismengen sind $M(\pi_u) = \{2,4,5\}$, $M(\pi_v) = \{1,7\}$.
Dann ist die Menge $Z = \{\pi_u, \pi_v\}$ eine Zyklenpartition von $M(Z) = \{1,2,4,5,7\}$.

Dann gilt $f_Z : \{1,2,4,5,7\} \to \{1,2,4,5,7\}$ mit

$$f_Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \ldots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

   Sei $Z = (4,5,1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.

   Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

   Lösung:

   Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

   $$f_Z(1) = 4\,, \quad f_Z(2) = 2\,, \quad f_Z(3) = 3\,, \quad f_Z(4) = 5\,, \quad f_Z(5) = 1\,.$$

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie

$$\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\},\ \{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\}\ \{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\}\,!$$

- Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung* von f, d. h. eine Zyklenpartition Z von $[9]$, so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Lösung Teil 1:

Durch Auswertung von $f^i(x)$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\} &= \{1, 8, 4, 2\}\,, && (1)\\
\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\} &= \{6, 9, 3\}\,, && (2)\\
\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\} &= \{7, 5\}\,. && (3)
\end{aligned}
$$

Lösung Teil 2:

Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1, M_2 bzw. M_3.

Dann definiert f je einen Zyklus f_i
auf den Basismengen M_1, M_2 und M_3
mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1, 8, 4, 2)\,, \quad z_2 = (6, 9, 3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7, 5)\,.$$

Die Zyklenpartition

$$Z = (1, 8, 4, 2)\,(6, 9, 3)\,(7, 5)$$

ist eine Zyklendarstellung von f.

5. Sei f wie vorhin.
   - Geben Sie eine Matrixdarstellung von f^2 an!
   - Geben Sie eine Zyklendarstellung von f^2 an!
   - Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k > 0$, so dass $f^k = id$ gilt, wobei id die identische Abbildung ist!

Lösungen Teil 1 und 2:

Matrixdarstellung f^2:

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zyklendarstellung von f^2:

$$f^2 = (1,4)\,(2,8)\,(3,9,6)\,(5)\,(7)\,.$$

Lösung Teil 3:

Die gesuchte Zahl k ist gleich dem
kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)
der Längen der in f enthaltenen Zyklen f_i.

Die Längen sind 2,3 und 4.

Damit gilt

$$k = kgV(2,3,4) = 12\,.$$

2. Blatt 9, TA 1

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Permutationen einer n-elementigen Menge mit k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.
   - $s_{0,0} = 1\,.$
   - $s_{n,n} = 1\,.$
   - $s_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n\,.$
   - $s_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0\,.$

Lösung 1:

$s_{0,0}$:

Für $n = 0$ ist eine n-elementige Menge leer.

Die leere Abbildung oder Permutation ist eine, und mithin die einzige Abbildung der leeren Menge.

Sie hat natürlich $k = 0$ Zyklen.

Lösung 2:

$s_{n,n}$:

Eine Permutation,
die ebenso viele Zyklen besitzt,
wie die zu abzubildende Menge Elemente besitzt,
besteht aus einelementigen Zyklen.

Sie ist eindeutig bestimmt.

Lösung 3:

$s_{n,k}$:

Falls $k > n$,
dann ist also die Anzahl der Zyklen grösser
als die Anzahl der Elemente der abzubildenden Menge.

Da die Zyklen disjunkt sind,
muss mindestens einer der Zyklen leer sein (Schubfachprinzip),
was aber der Definition von Zyklen einer Permutation widerspricht.

Lösung 4:

$s_{n,0}$:

Da die Vereinigung der Definitionsbereiche der Zyklen die abzubildende, nichtleere Menge überdecken muss, muss mindestens ein nicht leerer Zyklus existieren.

Daraus folgt aber $k > 0$.

2. Beweisen Sie mithilfe eines kombinatorischen Arguments, dass gilt:
$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1)\,.$$

Lösung:

Aus der Definition der Stirlingzahlen $s_{n,k}$ ergibt sich hier $n \geq 2$.

Es gilt insbesondere $s_{2,0} = 0$
in Übereinstimmung mit der rechten Seite der Gleichung für $n = 2$.

Die Menge der Permutationen von $[n]$ läßt sich als Vereinigung zweier disjunkter Mengen darstellen:

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen.
- Permutationen mit $n-3$ ein-elementigen Zyklen und einem 3-elementigen Zyklus:

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen:

  Wir gehen von den Partitionen von $[n]$ aus, die $n-4$ ein-elementige und zwei 2-elementige Klassen enthalten.

  Die Anzahl dieser Partitionen ist

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

  Da die Anzahl von Zyklen einer 1- oder 2-elementigen Menge jeweils gleich 1 ist, haben wir hier

$$\text{Anzahl der Partitionen} = \text{Anzahl der Permutationen}.$$

- Permutationen mit $n-3$ ein-elementigen Zyklen und einem 3-elementigen Zyklus:

  Die Anzahl der Partitionen mit $n-3$ ein-elementigen und einer 3-elementigen Klasse ist, gleich

  $$\binom{n}{3}.$$

  Nun aber kann die 3-elementige Klasse noch in 2-facher Weise zyklisch angeordnet werden.

  Also gibt es

  $$2 \cdot \binom{n}{3}$$

  Permutationen mit dieser Eigenschaft.

Wir fassen zusammen:

$$
\begin{aligned}
s_{n,n-2} &= 2 \cdot \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \\
&= \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\
&= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(8 + 3(n-3)) \\
&= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-1)\,.
\end{aligned}
$$