WS 2009/10

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

4. November 2009

ZÜ III Vorbereitung TÜ Blatt 3

1. VA 1

Seien x, y, z, p, q Variablenbezeichungen aus dem Vokabular *der*(?) aussagenlogischen Syntax.

1. Wie lässt sich das Bikonditional $\Leftrightarrow$ durch einen Ausdruck in den Operatoren $\vee$ und $\neg$ (äquivalent) darstellen?

   Antwort: Die Semantik des Bikonditional $\Leftrightarrow$ bzw. $x \Leftrightarrow y$ wurde in der Vorlesung durch die folgende Wahrheitstabelle definiert.

x	y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wir zeigen nun durch „semantischen Vergleich“

$$x \Leftrightarrow y \equiv \neg(x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee \neg x)$$

D. h., wir vergleichen die beiden letzten Spalten in der folgenden Tabelle.

x	y	$\neg(x \vee y)$	$\neg(\neg y \vee \neg x)$	$\neg(x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee \neg x)$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Bemerkung: Die Tabelle realisiert die Auswertung eines logischen Ausdrucks wie bei arithmetischen Ausdrücken.

2. Sei β eine Belegung mit $\beta(x) = 1,\ \beta(y) = 0,\ \beta(z) = 1$.
Ist β passend zu dem Ausdruck $x \Leftrightarrow z$?

Antwort:

Die Menge der in $x \Leftrightarrow z$ vorkommenden Variablen ist $\{x, z\}$.

β passt zu $x \Leftrightarrow z$, weil es mindestens x und z einen Wert zuordnet.

Es spielt dabei keine Rolle, ob β darüberhinaus weiteren Variablen einen Wert zuordnet.

3. Wie viele minimale passende Belegungen gibt es zu $x \Leftrightarrow y$? Welche sind das?

   Antwort: Eine minimale passende Belegung ordnet nur den in dem Ausdruck vorkommenden Variablen einen Wert zu.

   Bei 2 Variablen gibt es 4 verschiedene, minimale passende Belegungen β_i.

	β_1	β_2	β_3	β_4
x	0	0	1	1
y	0	1	0	1

4. Berechnen Sie $[x \Leftrightarrow y](\beta)$, mit obigem β!

Antwort:
Für $\beta(x) = 1$ und $\beta(y) = 0$ liefert die dritte Zeile der Wertetabelle von $x \Leftrightarrow y$ den Wert 0, d. h. es gilt

$$[x \Leftrightarrow y](\beta) = 0\,.$$

Bemerkung: Der Ausdruck $[x \Leftrightarrow y]$ bezeichnet die Funktion, die durch den Ausdruck $x \Leftrightarrow y$ definiert wird.

5. Ist $x \Leftrightarrow y$ allgemeingültig? Begründung!

   Antwort:
   $x \Leftrightarrow y$ ist nicht allgemeingültig,
   denn in der Wertespalte der Wertetabelle von $x \Leftrightarrow y$ kommt der Wert 0 vor.

2. VA 2

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!

   Antwort:
   Sei $F = x \Leftrightarrow y$.

   Dann erfüllt β_1 (siehe VA 1) die Formel F, denn es gilt $[F](\beta_1) = [\text{false} \Leftrightarrow \text{false}](\beta_1) = 1$.

   Es erfüllt β_2 (siehe VA 1) die Formel $\neg F$, denn es gilt $[\neg F](\beta_2) = [\neg(\text{false} \Leftrightarrow \text{true})](\beta_1) = 1$.

2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

Antwort:
Ein Widerspruch ist nicht erfüllbar, also z. B. $\neg x \wedge x$.

2. Sei $\models F$. Zeigen Sie, dass die Formel $H \Rightarrow F$ eine Tautologie ist für alle Formeln H.

Antwort:
$\models F$ steht für true $\models F$,
und dies ist gleichbedeutend damit,
dass true $\Rightarrow F$ eine Tautologie ist, d. h. $F \equiv$ true.

Wir zeigen nun, dass für alle Formeln H und F gilt

$$H \Rightarrow F \equiv \text{true}\,.$$

Natürlich kann man dieses Formelschema mit
unendlich vielen aussagenlogischen Formeln instanziieren .

Nach Vorlesung genügt es aber bei Äquivalenzbeweisen, Formelschema-Variablen H und F durch aussagenlogische Variablen p und q zu ersetzen und dann folgendes zu zeigen:

Falls $q \equiv$ true gilt, dann gilt auch $p \Rightarrow q \equiv$ true .

Beweis:
Nach der Kongruenzregel (Leibnitz-Regel) kann man Teilformeln durch äquivalente Formeln ersetzen.

Also folgt mit $q \equiv \mathsf{true}$

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow q &\equiv p \Rightarrow \mathsf{true} \\
&\equiv \neg p \vee \mathsf{true} \\
&\equiv \mathsf{true}\,. && \text{(Dominanz)}
\end{aligned}
$$

3. VA 3

Zeigen Sie durch Benutzung von Äquivalenzregeln
die Allgemeingültigkeit bzw. semantische Äquivalenz der folgenden Ausdrücke.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow p\,.$

   Beweis:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow p \quad &\equiv \quad \neg(p \wedge q) \vee p && \text{(Def.)}\\
&\equiv \quad (\neg p \vee \neg q) \vee p && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \quad (\neg p \vee p) \vee \neg q && \text{(Ass., Komm.)}\\
&\equiv \quad \text{true}\,. && \text{(Triv.Taut., Dom.)}
\end{aligned}
$$

2. $q \Rightarrow (p \vee q)\,.$

   Beweis:

$$
\begin{aligned}
q \Rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg q \vee (p \vee q) && \text{(Def.)}\\
&\equiv (\neg q \vee q) \vee p && \text{(Komm., Ass.)}\\
&\equiv \text{true}\,. && \text{(Triv.Taut., Dom.)}
\end{aligned}
$$

3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; p \Rightarrow (p \wedge q)\,.$

   Beweis: Nun rechnen wir

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \Leftrightarrow p &\equiv ((p \wedge q) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (p \wedge q))\\
&\equiv \text{true} \wedge (p \Rightarrow (p \wedge q))\\
&\equiv p \Rightarrow (p \wedge q)\,.
\end{aligned}
$$

4. $q \Leftrightarrow (p \vee q) \;\equiv\; (p \vee q) \Rightarrow q\,.$

Beweis: Nun rechnen wir

$$
\begin{aligned}
q \Leftrightarrow (p \vee q) &\equiv (q \Rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \vee q) \Rightarrow q) \\
&\equiv \textsf{true} \wedge ((p \vee q) \Rightarrow q) \\
&\equiv (p \vee q) \Rightarrow q\,.
\end{aligned}
$$