WS 2009/10

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

18. November 2009

ZÜ V Nachträge und Vorbereitung der Blätter 4 bzw. 5

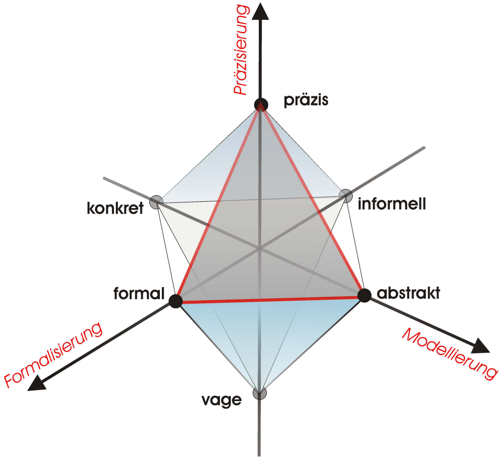
1. Blatt 4, TA 3

Definieren Sie eine Struktur S, in der gleichzeitig die beiden folgenden Formeln wahr sind.

$$\neg\exists x\ (\forall y\ P(x,y)) \quad \text{und} \quad \forall y\ (\exists x\ P(x,y))\,.$$

Antwort: Sei $P(x,y)$ definiert durch „x Vorfahr von y“.

Darstellung der Modellierung im Oktaeder:



2. Blatt 5, VA 1

Ziel: Untersuchung der Formel
in Kurzschrift:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ |f(n)| \leq \epsilon \cdot g(n)$$

Im Prädikatenkalkül:

$$\forall n \ (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))$$

$$\exists n_0 \ [N^1(n_0) \ \Rightarrow \ \forall n \ (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))]$$

$$\forall \epsilon \ (P^1(\epsilon) \ \Rightarrow \ \exists n_0 \ [N^1(n_0) \ \Rightarrow \ \forall n \ (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))])$$

Wir definieren eine Struktur $S = (U, I)$ mit dem

Universum U als Vereinigung der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und der Menge F aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

und der folgenden Interpretation I:

$N^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung $x_S \in \mathbb{N}$,

$P^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung, dass x_S eine positive reelle Zahl ist, d. h. $x_S \in \mathbb{R}, x_S > 0$ gilt,

$F^1(f)$ das Prädikat mit $f_S \in F$ und schließlich

$V^4(f, g, n, \epsilon)$ das Prädikat mit der Bedeutung

$$|f_S(n_S)| \leq \epsilon_S \cdot g_S(n_S)$$

mit $n_S \in \mathbb{N}$, $\epsilon_S \in P^1_S$ und $f_S, g_S \in F$.

Seien f_S und g_S Elemente von F, so dass $f_S(n) = 2$ und $g_S(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1. Für welche $n_S \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_S \in \mathbb{R}$ gilt $V^4(f, g, n, \epsilon)$?
   Geben Sie die Lösung als Menge von Paaren (n_S, ϵ_S) an.

Antwort:
Wir bezeichnen die Semantik von $V^4(f, g, n, \epsilon)$ mit $V_S^4 = V$. Es gilt also definitionsgemäß $V \subseteq F \times F \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}(f_S, g_S, n_S, \epsilon_S) \in V \quad &\iff \quad |f(n_S)| \leq \epsilon_S \cdot g_S(n_S) \\ &\iff \quad 2 \leq \epsilon_S \cdot n_S \\ &\iff \quad (n_S, \epsilon_S) \in \{(m, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid \tfrac{2}{m} \leq c\}\,.\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist also $\{(m, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid \frac{2}{m} \leq c\}$.

2. Sei $G^2(n, n_0)$ das Prädikat, das genau dann wahr ist, wenn $N^1(n) \wedge N^1(n_0) \wedge (n \geq n_0)$ gilt.
   Für welche n_0 gilt (in Abhängigkeit von ϵ) die Formel

$$\forall n \; (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))$$

   d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; 2 \leq \epsilon \cdot n \, ?$$

Antwort:
Wir benutzen die Bezeichnung H für die Formel
$\forall n \; (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))$.
Man beachte, dass mit Ausnahme von n alle Variablen von H frei sind in F.
f, g, n_0, ϵ sind also frei und n ist durch den Allquantor gebunden.

Wir wählen nun n_0 in Abhängigkeit von ϵ geeignet, so dass H gilt:

$$\frac{2}{\epsilon_S} \leq (n_0)_S$$

und erhalten damit für alle $n_S \geq (n_0)_S$

$$\frac{2}{n_S} \leq \frac{2}{(n_0)_S} \leq \epsilon_S \,,$$

und damit die Gültigkeit der Formel H.

Bemerkung: In der mathematischen Praxis erfolgt die Indizierung der Bezeichnungen mit der Struktur S nicht explizit.
Auch wir werden diese Indizierung im weiteren Verlauf der Übungen nur im streng prädikatenlogischen Kontext benützen, und zwar dann, wenn es ausdrücklich gefordert wird.

3. Blatt 5, VA 2

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln

$$\exists x\ P(x) \qquad \text{und} \qquad \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))\,.$$

Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)\,.$$

Protokoll der Regelanwendungen:

Nr.	Annahmen		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a)$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a) \Rightarrow Q(a)$	2.+ Allquantorbes.
4.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$Q(a)$	1.+3.+ Impl.bes.
5.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	4.+ Existenzeinf.
6.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ P(x)$	Annahmeregel
7.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	5.+6.+ Existenzbes.

Diese Herleitung beschreibt exakt die Vorgehensweise bei späteren Existenzbeweisen, die mit dem Ansatz „Sei a ein Element mit der Eigenschaft $P(a)$“ beginnt.