WS 2009/10

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

24. November 2009

ZÜ V Vorbereitung Blatt 6

1. Blatt 6, VA 1

Machen Sie sich mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion ausreichend vertraut und geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\,, \qquad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n}\,.$$

Hinweis: Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q. Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x. Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit $\log_b x$ bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige Basen gelten, so schreibt man häufig $\log x$. Die wichtige Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir

$$\ln x \quad \text{bzw.} \quad \lg x \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{ld}\, x.$$

Antwort:

Voraussetzung für alle folgenden Formeln ist die Positivität der Parameter, also $0<a$, $0<b$, $0<c$ bzw. $0<n$.

Die Beweise kann man durch Logarithmieren führen.
Zum Beweis einer Gleichung

$$x = y$$

für positive x und y beweist man zunächst

$$\log_d x = \log_d y\,,$$

weil daraus wegen $z = d^{\log_d z}$ sofort $x = y$ folgt.
Wir zeigen also

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a}\,, \qquad \ln n^{\ln\ln n} = \ln\,(\ln n)^{\ln n}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c) \cdot (\log_b a) \\ &= (\log_b a) \cdot (\log_b c) \\ &= \log_b c^{\log_b a} \qquad (1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\ln n^{\ln \ln n} &= (\ln \ln n) \cdot (\ln n) \\ &= (\ln n) \cdot \ln (\ln n) \\ &= \ln (\ln n)^{\ln n} \,. \qquad (2)\end{aligned}$$

2. Blatt 6, VA 2

Geben Sie für die folgenden Aussagen einen *direkten* Beweis an. Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \; = \; \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^{n} a_i \; + \; m \cdot b) \; = \; b\,.$$

Hinweis: Für beliebige Funktionen $f(x)$, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind, können eine Summenfunktion Σ und eine Produktfunktion $\prod$ definiert werden der Form

$$\sum_{i=i_0}^{n} f(i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{n} f(i)\,.$$

Dabei sind i, i_0, n ganze Zahlen mit $n \geq i_0$. Es gilt

$$\sum_{i=i_0}^{i_0} f(i) = f(i_0) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{i_0} f(i) = f(i_0)$$

und

$$\sum_{i=i_0}^{n+1} f(i) = f(n+1) + \sum_{i=i_0}^{n} f(i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{n+1} f(i) = f(n+1) \cdot \prod_{i=i_0}^{n} f(i)\,.$$

Eine intuitive Vorstellung von der Summendefinition bekommt man durch die Schreibweise

$$\sum_{i=i_0}^{n} f(i) = f(i_0) + f(i_0+1) + \ldots + f(n-1) + f(n)\,.$$

Achtung: Auch leere Summen und Produkte sind definiert durch den neutralen Wert der entsprechenden Operation.

Antwort:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert. Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) &= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \\
&= \frac{1}{n+m}\left(1+\frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n+m}\left(\frac{n+m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,.
\end{aligned}$$

3. Blatt 6, VA 3

Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion die folgenden Gleichungen für jeweils alle passenden Parameterbelegungen.

1. Im Folgenden wird die 1 als konstante Funktion für alle i aufgefasst.

$$\sum_{i=i_0}^{n} f(i) = \sum_{i=i_0+k}^{n+k} f(i-k)\,, \qquad \sum_{i=i_0}^{n} 1 = n - i_0 + 1\,.$$

Antwort:

Sei $m = n - i_0 + 1$ die Anzahl der Elemente von $[i_0, n]$. Wegen $n \geq i_0$ gilt $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen beide Gleichungen mit vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$.

Wir bezeichnen zunächst die Aussage, dass die beiden Gleichungen für ein $m \in \mathbb{N}$ und für dieses m gleichzeitig für alle übrigen Parameter und Funktionen gelten, als $P(m)$.

Wir zeigen dann den sogenannten Induktionsanfang $P(1)$ und anschließend für alle $m \in \mathbb{N}$ den Induktionsschritt

$$P(m) \Rightarrow P(m+1)\,.$$

Induktionsanfang :
Es gilt $P(1)$:

Die erste bzw. zweite Gleichung bedeutet

$\sum_{i=i_0}^{i_0} f(i) = \sum_{i=i_0+k}^{i_0+k} f(i-k)$
bzw.
$\sum_{i=i_0}^{i_0} 1 = i_0 - i_0 + 1\,.$

Beide Gleichungen gelten nach Definition wegen

$\sum_{i=i_0}^{i_0} f(i) = f(i_0) = f(i_0 + k - k) = \sum_{i=i_0+k}^{i_0+k} f(i-k)$
bzw.
$\sum_{i=i_0}^{i_0} 1 = 1 = i_0 - i_0 + 1\,.$

Induktionsschritt :
Es gilt $\forall m, m \in \mathbb{N} : \; P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch
Induktionsannahme und **Induktionsschluss**.

Induktionsannahme:
Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(m)$.

Induktionsschluss:
Es gilt $P(m+1)$:
Zunächst für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i_0}^{n+1} f(i) &= f(n+1) + \sum_{i=i_0}^{n} f(i) && \text{Def.}\\
&= f(n+k+1-k) + \sum_{i=i_0+k}^{n+k} f(i-k) && \text{I.A.}\\
&= \sum_{i=i_0+k}^{n+k+1} f(i-k) && \text{Def.}\\
&= \sum_{i=i_0+k}^{(n+1)+k} f(i-k) && \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Nun für die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i_0}^{n+1} 1 &= 1 + \sum_{i=i_0}^{n} 1 && \text{Def.} \\
&= 1 + (n - i_0 + 1) && \text{I.A.} \\
&= (n+1) - i_0 + 1 && \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

2. Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion

$$\left(a \cdot \sum_{i=i_0}^{n} f(i)\right) + \left(b \cdot \sum_{i=i_0}^{n} g(i)\right) = \sum_{i=i_0}^{n} (a \cdot f(i) + b \cdot g(i)) \,.$$

4. Blatt 6, VA 4

Für reellwertige Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $o(g(n))$ aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, die ein *kleineres Wachstum* besitzen als g, wie folgt definiert:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad :\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, n \geq n_0 \; [|f(n)| < \varepsilon \cdot g(n)] \, .$$

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ hat für gegen ∞ strebendes n den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die für alle n den Wert 1 besitzt.

Man zeige unter sorgfältiger Beachtung der Definitionen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Antwort:

Wir haben also zu zeigen

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, n \geq n_0 \; \left[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1\right].$$

Die hier anzuwendende Beweistechnik ist außerordentlich wichtig. Sie besteht in der schrittweisen Erfüllung des obigen prädikatenlogischen Ausdrucks von "links nach rechts" gemäß der Klammerung

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \; [\exists n_0 \in \mathbb{N} \; [\forall n, n \geq n_0 \left[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1\right]]].$$

Zunächst ist die Behauptung zu betrachten, dass für alle $\varepsilon > 0$ etwas Bestimmtes gilt, nämlich

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ \left[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1\right].$$

Deshalb nehmen wir zunächst ein beliebiges $\varepsilon > 0$ an und wollen zeigen, dass es ein n_0 (in Abhängigkeit von ε) gibt, so dass gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \ \left[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1\right].$$

Existenzbeweise werden häufig konstruktiv geführt. Wir konstruieren also ein geeignetes n_0 wie folgt:

$$n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 17.$$

$\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Nun zeigen wir, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1.$$

Wieder nehmen wir ein beliebiges n mit $n \geq n_0$ an. Es gilt $n \geq n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 17$, und deshalb $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1.$$

Damit sind wir mit dem Beweis fertig.

Warum haben wir 17 gewählt?

Tatsächlich hätten wir auch jede andere positive Zahl wählen können, die die Herleitung von $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gestattet.