WS 2009/10

Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

16. Dezember 2009

ZÜ IX Hausaufgaben Blatt 8

1. Blatt 8, HA 2.1

Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1000015 gibt es, so dass die Summe der einzelnen Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ ihrer Dezimaldarstellung genau 15 beträgt?

Lösung:

Die Zahlen $1.000.000, 1.000.001, \ldots, 1.000.014, 1.000.015$ müssen offenbar nicht mitgezählt werden, weil jede dieser Zahlen eine Quersumme unter 15 besitzt.

Es genügt also 6 Stellen der Dezimaldarstellung zu betrachten, dies sind die Zahlen von 1 bis $999\,999$.

Wir verteilen $n = 15$ Zähleinheiten mit dem Wert 1 auf die $m = 6$ Stellen beliebig (Null ist zugelassen).

Wir interpretieren nun die Zuteilung von i Einheiten an die Stelle k so, dass
die Stelle k mit Vielfachheit i in eine zu bildende Multimenge aufgenommen wird.

Alternativ kann man das
Modell der Verteilung von gleichen Bällen auf unterscheidbare Urnen
benutzen.

Dann entspricht das genannte Verteilungsproblem einer Bestimmung der Anzahl anz_L der 15-elementigen Multiteilmengen einer 6-elementigen Menge.

Dies entspricht auch der Anzahl der Lösungs-6-Tupel $x_1, x_2, \ldots, x_6$ von $\sum_{i=1}^{6} x_i = 15$ für $x_i \in \mathbb{N}_0$.
Es gilt

$$anz_L = \binom{m+n-1}{n} = \binom{20}{15} = \binom{20}{5} = 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3\,.$$

Damit gibt es 15504 Lösungen,
die zur Zahldarstellung in Frage kommen.

Um eine gültige Dezimaldarstellung konstruieren zu können, müssen wir noch sicherstellen, dass $x_i < 10$ für alle i gilt. Diese Bedingung kann höchstens für ein x_i verletzt sein.

Wir ziehen also diejenigen Fälle ab, wo genau ein x_i zwischen 10 und 15 liegt. Für $x_i = j$ mit $10 \leq j \leq 15$ ist die Zahl der Fälle für die übrigen 5 Stellen gegeben durch

$$\binom{15 - j + 5 - 1}{5 - 1}.$$

Wir erhalten durch Summierung über alle j für jede der 6 Stellen i

$$\sum_{j=10}^{15} \binom{15 - j + 5 - 1}{5 - 1} = \sum_{j=0}^{5} \binom{4 + j}{4} = \binom{10}{5} = 252\,.$$

Die allgemeine Formel für die zweite Summe wurde in Blatt 7, TA 4.1 gezeigt.

Damit erhalten wir für die Gesamtanzahl Anz verschiedener Zahlen zwischen 1 und 1.000.015 mit Ziffernsumme 15

$$Anz = 15504 - 6 \cdot 252 = 13992\,.$$

2. Blatt 8, HA 2.2

Wie viele Binärwörter der Länge n (nur Buchstaben 0 und 1) gibt es, die die Ziffernfolge "00" genau zweimal enthalten?

Präzisierung: In "000" ist die Ziffernfolge "00" an zwei Positionen, d.h. zweimal enthalten.

Lösung:

Sei B_n die Menge der Binärwörter der Länge n, die die Ziffernfolge "00" genau zweimal enthalten.

Die Wörter aus B_n sind genau diejenigen Wörter w der Länge n und der Form

$$w = xyz \in \{0,1\}^* \quad \text{mit} \quad x, y, z \in \{0,1\}^*,$$

so dass

x mit 0 endet,
y mit 0 beginnt und mit 0 endet,
z mit 0 beginnt

und insbesondere

x, y, z keine aufeinanderfolgenden Nullen enthalten.

Sei $d_x(k)$ die Anzahl der Wörter aus $\{0,1\}^*$ der Länge k, die keine aufeinanderfolgenden Nullen enthalten und mit 0 enden.

Sei $d_y(k)$ die Anzahl der Wörter aus $\{0,1\}^*$ der Länge k, die sowohl mit 0 beginnen als auch mit 0 enden und keine aufeinanderfolgende Nullen enthalten.

Sei $d_z(k)$ die Anzahl der Wörter aus $\{0,1\}^*$ der Länge k, die keine aufeinanderfolgenden Nullen enthalten und mit 0 beginnen.

Für die Gesamtanzahl $|B_n|$ gilt dann

$$|B_n| = \sum_{\{(i,j,k) \mid i+j+k=n\}} d_x(i) \cdot d_y(j) \cdot d_z(k)\,.$$

Wir bestimmen nun die $d_x(k)$, $d_y(k)$ und $d_z(k)$.

Sei $d_x(k,i)$ die Anzahl der Wörter aus $\{0,1\}^*$ der Länge k, die i nicht aufeinanderfolgende Nullen enthalten und mit 0 enden.

Wenn i Nullen durch weitere $i-1$ Einsen getrennt sind, dann kann man die restlichen $k-2i+1$ Einsen auf i Positionen vor und zwischen den i Positionen der Nullen beliebig verteilen. Wir erhalten also

$$d_x(k,i) = \binom{i + (k-2i+1) - 1}{k-2i+1} = \binom{k-i}{i-1}.$$

Für $d_x(k)$ und $d_z(k)$ gelten damit

$$d_x(k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-i}{i-1},$$

$$d_z(k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-i}{i-1}.$$

Die Bestimmung von $d_y(k)$ unterscheidet sich geringfügig.

Sei $d_y(k,i)$ die Anzahl der Wörter aus $\{0,1\}^*$ der Länge k, die i nicht aufeinanderfolgende Nullen enthalten und sowohl mit 0 beginnen als auch mit 0 enden.

Wenn i Nullen durch weitere $i-1$ Einsen getrennt sind, dann kann man
die restlichen $k-2i+1$ Einsen
auf $i-1$ Positionen zwischen den i Positionen der Nullen
beliebig verteilen. Wir erhalten also

$$d_y(k,i) = \binom{(i-1)+(k-2i+1)-1}{k-2i+1} = \binom{k-i-1}{i-2}.$$

und damit

$$d_y(k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-i-1}{i-2}.$$

3. Blatt 8, HA 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Teilmengen B von $[n]$, die mindestens ein konsekutives Paar $k, k+1$ von natürlichen Zahlen enthalten und definieren

$$A_n = \{B \subseteq [n] \mid |B| = 3 \wedge \exists x, y \in B : x + 1 = y\}.$$

Bestimmen Sie $|A_n|$ als arithmetische Formel, die von n abhängig ist, und begründen Sie Ihr Resultat.

Hinweis: Partitionieren Sie A_n in geeignete 3 disjunkte Klassen und bestimmen Sie zunächst die Anzahl der Elemente in jeder dieser Klassen.

Lösung:

Für $n \leq 2$ gilt offensichtlich $|A_n| = 0$ und für $n = 3$ gilt $|A_n| = 1$.

Das Folgende gilt für $n \geq 4$.

Eine 3-elementige Teilmenge von $[n]$, bestehend aus

$$a, b, c \in [n] \text{ mit } a < b < c,$$

die mindestens ein konsekutives Paar enthält, erfüllt genau eine der folgenden Bedingungen,
die gewisse Positionsmuster beschreiben.

$$\begin{array}{lllll} B1: & a = x + 1, & b = a + 1, & c = b + 2 + y, & n = c + z, \\ B2: & a = x + 1, & b = a + 2 + y, & c = b + 1, & n = c + z, \\ B3: & a = x + 1, & b = a + 1, & c = b + 1, & n = c + z, . \end{array}$$

wobei $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Wir bezeichnen die Menge aller 3-elementigen Teilmengen von $[n]$, die die Bedingung $B1$ erfüllen, mit B_1.

Entsprechend definieren wir B_2 und B_3.

Folglich wird A_n durch die B_i partitioniert.

Nun bestimmt man die Anzahl $|B_i|$, indem man die noch freien Elemente auf x, y, z verteilt.

Bei den Positionsmustern B_1 und B_2 können $n-4$ gleiche Elemente verteilt werden.

Die gesuchte Anzahl $|B_1|$ bzw. $|B_2|$ von Verteilungen ergibt sich als Anzahl der $(n-4)$-elementigen Multiteilmengen der 3-elementigen Menge $\{x, y, z\}$.

$|B_3|$ ergibt sich als Anzahl der $(n-3)$-elementigen Multiteilmengen der 2-elementigen Menge $\{x, z\}$.

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
|B_1| &= \binom{3+(n-4)-1}{n-4} = \binom{n-2}{2},\\
|B_2| &= \binom{3+(n-4)-1}{n-4} = \binom{n-2}{2},\\
|B_3| &= \binom{2+(n-3)-1}{n-3} = n-2\,,
\end{aligned}
$$

und damit

$$|A_n| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = (n-2)^2\,.$$

4. Blatt 8, HA 4

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : [m] \to [n]$ wird monoton genannt, wenn für alle $i, j \in [m]$ die folgende Implikation gilt.

$$i \leq j \implies f(i) \leq f(j)\,.$$

Wie viele derartige Funktionen f gibt es
in Abhängigkeit von m und n?

Geben Sie eine Formel an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

Aus der Monotonie von f folgt, dass das Urbild $f^{-1}(1)$ gleich einem Intervall $[1, m_1]$ mit $m_1 \in \mathbb{N}_0$ ist.
$m_1 = 0$ bedeutet, dass das Intervall bzw. das Urbild $f^{-1}(1)$ leer ist.

Wir setzen aus formalen Gründen $m_0 = 0$,
dann gilt sogar für alle $k \in [n]$ die Intervalldarstellung

$$f^{-1}(k) = [m_{k-1} + 1, m_k]\,,$$

wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $m_{k-1} \leq m_k$.

Es folgt, dass die Abbildung f allein durch die

Anzahl $|[m_{k-1}+1, m_k]|$ für alle $k \in [n]$ festgelegt ist.

Als Nebenbedingung haben wir lediglich:

Die Summe aller „Längen“ der Intervalle ist gleich m.

Nun verteilen wir

m gleiche Elemente auf n unterscheidbare Elemente
(Abbildungsmodell m gleiche Bälle auf n unterscheidbare Urnen)

und erhalten die Anzahl anz der verschiedenen Verteilungen als

Anzahl der m-elementigen Multiteilmengen
einer Menge mit n Elementen, d. h.

$$anz = \binom{m+n-1}{m}.$$