Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Prof. Dr. Javier Esparza

Wintersemester 2009/10
Abschlussklausur
13. Februar 2010

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 135 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort! Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Jeder 17-reguläre Graph besitzt eine Eulertour.
2. Seien $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $E' \subseteq E,\ V' \subseteq V$ nichtleere Mengen. Dann ist $T = (V', E')$ ein Teilgraph von G.
3. Der Baum mit Prüfer-Code $5, 5, 5$ besitzt die Gradfolge $1, 1, 1, 1, 4$.
4. $\langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle$ ist eine Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.
5. Es gibt einen Körper mit 4 Elementen.
6. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $(k \bmod 5) \bmod 2 = (k \bmod 2) \bmod 5$.
7. Von den 16 verschiedenen 2-stelligen booleschen Operationen $b : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ erfüllt genau eine die Gruppeneigenschaften mit 1 als neutrales Element.
8. Jede Gruppe mit 7 Elementen ist zyklisch.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien p, q, r Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Sei $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel F_1 an, die nur Vorkommen der booleschen Operatoren $\neg$ und $\vee$ enthält.

2. Sei $F = p \vee (\neg q \vee \neg r)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel F_2 an, die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators $\Rightarrow$ enthält.

3. Sei $F = \neg p \vee (\neg q \vee \neg r)$. Zeigen Sie: Keine Formel F_3, die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators $\Rightarrow$ enthält, ist äquivalent zu F.

   Hinweis: Betrachten Sie die Belegung β mit $\beta(p) = \beta(q) = \beta(r) = 1$.

Hörsaalansage: In einer Formel, die als Operatoren nur Vorkommen von $\Rightarrow$ enthält, kommen auch die Konstanten true und false nicht vor.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Beweisen Sie:

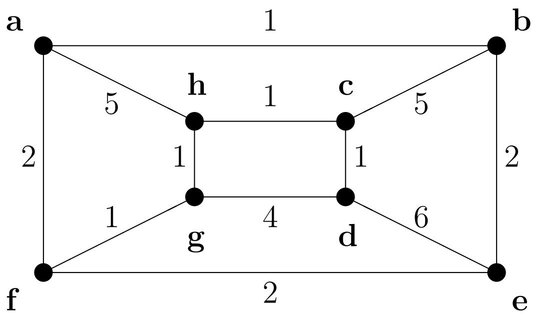
1. In jedem $(n-3)$-regulären Graphen mit Knotenzahl n besitzt jeder induzierte Teilgraph, der 4 Knoten enthält, mindestens auch 2 Kanten.

2. Sei $G = (V, E)$ ein 3-regulärer Graph, der einen Hamiltonkreis enthält. Dann gibt es zu G auch mindestens 3 (paarweise verschiedene) perfekte Matchings.

   Hinweis: Betrachten Sie insbesondere den Teilgraphen von G, der entsteht, wenn man alle Kanten eines Hamiltonkreises entfernt.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Wir betrachten den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}\}$, dessen Kanten mit ganzzahligen Längenangaben g gewichtet sind:



1. Berechnen Sie mithilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung $d(\mathrm{a}, \mathrm{d})$ zwischen den Knoten a und d!
   Protokollieren Sie dabei die auftretenden Zwischenergebnisse durch Einträge in eine geeignete Tabelle, so dass Ihr Berechnungsweg sichtbar wird.

2. Bestimmen Sie mithilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines minimalen Spannbaums von G. Protokollieren Sie Ihren Berechnungsweg.

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Die Stirlingzahlen zweiter Art $S_{n,k}$ erfüllen für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Rekursion $S_{n,k} \;=\; S_{n-1,k-1} \;+\; k \cdot S_{n-1,k}\,.$

1. Beweisen Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \;=\; 2^n - 1\,.$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{i,2} \;=\; \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\,.$$

   Wenden Sie die Gleichung $\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} S_{i,2} \;=\; \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] S_{i,2}$ für den Induktionsschluss an und nutzen Sie anschließend teilweise die Rekursion für die Stirlingzahlen! Beachten Sie $S_{1,2} = 0$ und $\binom{n}{n+1} = 0$.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen die Gruppe $\mathcal{S}_4$. Das neutrale Element der Gruppe sei id. Wir betrachten die in Zyklusschreibweise gegebenen Permutationen

$$p = (1, 2)(3)(4) \qquad \text{und} \qquad q = (1)(2)(3, 4)\,.$$

1. p und q sind involutorisch, d.h. $p \circ p = id$ und $q \circ q = id\,.$
   Zeigen Sie $p \circ p = id$.

2. Zeigen Sie, dass $p \circ q = q \circ p$ gilt.

Seien $r = p \circ q$ und $U = \{id, p, q, r\}$.

3. Geben Sie eine $\circ$-Verknüpfungstafel an für die Elemente aus U.

4. Beweisen Sie, dass die Menge U mit jedem Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält (mit $x \circ x^{-1} = id$).

5. Aus den obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist.

   Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ isomorph zur Gruppe U? Begründung!

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $a(x) = x^4 + x^3 + 3$ und $b(x) = 3x^2 + 4$ aus dem Polynomring $\mathbb{Z}_5[x]$ über dem Körper $\mathbb{Z}_5$.

1. Wie viele Elemente enthält die Menge R_b aller Polynome $r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(b)$?

2. Bestimmen Sie Polynome $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$, so dass gilt $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$ mit $\text{grad}(r) < 2$.
