Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Prof. Dr. Javier Esparza

Wintersemester 2009/10
Wiederholungsklausur
6. April 2010

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 165 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ	Korrektor
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Anzahl der reflexiven Relationen $R \subseteq M \times M$ über einer 3-elementigen Menge M ist 64.

2. Für alle Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt:
   Falls g surjektiv auf C und f nicht surjektiv auf B ist, dann ist die Komposition $f \circ g$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ nicht surjektiv auf C.

3. $\sqrt{\ln(n+1)} \in o(\ln \sqrt{n+1})$.

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$.

5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 \bmod (n+1) = 1$.

6. Jeder (zusammenhängende oder unzusammenhängende) Graph, dessen Knotenmenge V und Kantenmenge E die Gleichung $|V| = |E| + 1$ erfüllt, ist planar.

7. Jeder Graph mit Gradfolge 1,1,1,1,1,5 besitzt ein perfektes Machting.

8. Jede Gruppe mit 7 Elementen ist kommutativ.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für den aussagenlogischen Operator $\otimes$ des „ausschließenden Oder“ gilt bekanntlich die Kommutativität $x \otimes y \equiv y \otimes x$ und die Assoziativität $(x \otimes y) \otimes z \equiv x \otimes (y \otimes z)$. Wir dürfen auch $x \otimes y \equiv \neg(x \Leftrightarrow y)$ als bekannt voraussetzen.

1. Zeigen Sie mittels Angabe einer geeigneten Belegung β, dass die Distributivität $x \otimes (y \Leftrightarrow z) \equiv (x \otimes y) \Leftrightarrow (x \otimes z)$ nicht gilt.

Für Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den klammerfreien Ausdruck $x_1 \otimes x_2 \otimes \ \ldots \ \otimes x_k$, den wir im Folgenden kurz mit $\bigotimes_{i=1}^{k} x_i$ bezeichnen wollen.

Für jede passende Belegung β sei der Wert $\left[\bigotimes_{i=1}^{k} x_i\right](\beta)$ mittels einer beliebigen korrekten Klammerung definiert, z. B. im Fall $k = 3$ mittels $\bigotimes_{i=1}^{3} x_i = (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$.

2. Bestimmen Sie mit einer Wahrheitstafel, für wie viele minimale passende Belegungen β der Ausdruck $\bigotimes_{i=1}^{3} x_i$ den Wert 0 besitzt.

3. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und Belegungen β mittels vollständiger Induktion über n: Falls $\beta(x_i) = 1$ für alle $i = 1, 2, \ldots, (2n+1)$ gilt, dann gilt auch $\left[\bigotimes_{i=1}^{2n+1} x_i\right](\beta) = 1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien x, y, z Variablen und P ein 2-stelliges Prädikat aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x \forall y \ (\ P(x,y) \Rightarrow \exists z \, (\neg P(x,z) \wedge P(y,z)) \ ) \, .$$

1. Zeigen Sie mithilfe der Regeln nach De Morgan die logische Äquivalenz

$$\neg F \ \equiv \ \exists x \exists y \ (\ P(x,y) \ \wedge \ \forall z \, (P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \ ) \, .$$

2. Geben Sie passende Strukturen S bzw. T an, so dass $[F](S) = 1$ und $[\neg F](T) = 1$ gelten.

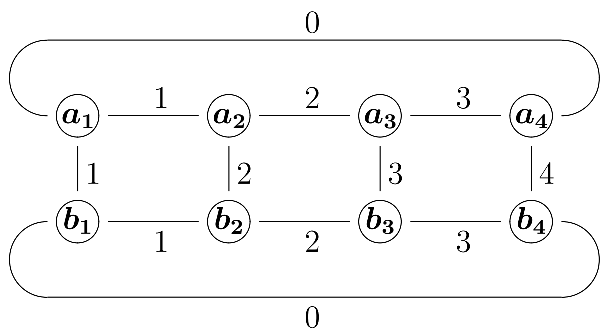
3. Sei $S = (U_S, I_S)$ eine zu F passende Struktur, die F wahr macht, d.h., dass $[F](S) = 1$ gilt.

   Zeigen Sie mit Widerspruchsbeweis für alle $a \in U_S$, dass $(a,a) \notin I_S(P)$ gilt.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Wir betrachten Kanten-gewichtete Graphen $G_n = (V, E)$ nach Art einer ringförmig geschlossenen Strickleiter mit $2n$ Knoten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie Kanten $\{a_i, b_i\}, \{a_i, a_{(i \bmod n)+1}\}, \{b_i, b_{(i \bmod n)+1}\}$ mit $i \in [n]$. Die ganzzahligen Gewichte der Kanten seien i für $\{a_i, b_i\}$ und $i \bmod n$ für $\{a_i, a_{(i \bmod n)+1}\}$ und $\{b_i, b_{(i \bmod n)+1}\}$ mit $i \in [n]$. Für $n = 4$ ergibt sich beispielsweise der folgende Graph

$\boldsymbol{G_4}$:



1. Zeigen Sie, dass G_n für geradzahlige n bipartit ist.

2. Wir betrachten G_4 und nehmen an, dass die Knoten von 1 bis 8 nummeriert sind, so dass die Knoten a_i die Nummer i und die Knoten b_i die Nummer $i + 4$ erhalten.

   Stellen Sie den Spannbaum von G_4 mit Prüfer-Code $1, 2, 2, 3, 3, 4$ graphisch dar.

3. Bestimmen Sie mithilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines minimalen Spannbaums von G_4. Protokollieren Sie Ihren Berechnungsweg.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Menge der Permutationen über der Menge $[n]$ natürlicher Zahlen zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen nennt man die Symmetrische Gruppe S_n. Wir betrachten S_n für gewisse $n \in \mathbb{N}$ mit id als dem neutralen Element.

1. Geben Sie ein Element $p \in S_9$ an, so dass 9 die kleinste Zahl ist mit $p^9 = id$.
2. Geben sie Elemente $p, q \in S_4$ an, so dass gilt $p \circ q \neq q \circ p$.
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen S_2 und $\langle Z_4^*, \cdot_4 \rangle$?

   Hinweis: Definitionsgemäß gilt $Z_4^* = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x < 4 \text{ und } ggT(x, n) = 1\}$ und $\cdot_4$ ist die Multiplikation modulo 4.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Wir zählen gewisse Möglichkeiten, Wörter über dem 3-elementigen Alphabet $A = \{a, b, x\}$ zu bilden. Geben Sie alle Ergebnisse als Dezimalzahl an und begründen Sie Ihre Ergebnisse!

1. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ gibt es, in denen der Buchstabe a höchstens einmal und der Buchstabe b höchstens zweimal vorkommt (z. B. ba, das leere Wort ϵ)?

2. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ der Länge 11 gibt es, in denen genau zweimal der Buchstabe a vorkommt und gleichzeitig mindestens zwei Buchstaben b zwischen den beiden a's auftreten?

3. Wie viele Wörter über A der Länge 6 gibt es, in denen der Buchstabe a einmal, der Buchstabe b zweimal und der Buchstabe x dreimal vorkommt?

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Wir betrachten 3 Fehlerkategorien R, B und G, die ein Versandhaus beim Versand von Paketen benutzt. Die Ausgangskontrolle markiert ein fehlerhaftes Paket jeweils mit einem roten bzw. blauen bzw. grünen Aufkleber je nachdem, welche Fehler der genannten Arten bei dem Paket festgestellt wurden (für jede Farbe höchstens einen entsprechenden Aufkleber).

Wir nehmen an, dass die genannten 3 Fehlerarten bei jeder Zählung von 1000 fehlerhaften Paketen gleich häufig vorkommen. Wir nehmen weiter an, dass von 1000 Paketen jeweils deren Aufkleber wie folgt gezählt wurden:

5 Pakete mit Aufklebern aller drei Farben,
25 Pakete mit genau 2 Aufklebern der Farben rot und blau,
40 Pakete mit genau 2 Aufklebern der Farben rot und grün und
50 Pakete mit genau 2 Aufklebern der Farben blau und grün.

1. Wie viele von den 1000 markierten Paketen tragen einen roten Aufkleber?

2. Wir nehmen an, dass im Protokoll der Ausgangskontrolle die Zählung wie oben steht, allerdings wegen eines einzigen Tippfehlers die letzte Zeile wie folgt lautet:

   500 Pakete genau 2 Aufkleber der Farben blau und grün.

   Wie kann man allein aus den genannten Zahlen heraus nachweisen, dass ein Tippfehler vorliegen muss?

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Wir betrachten den Ring der Polynome $\mathbb{Z}_3[x]$ über dem Körper $\mathbb{Z}_3$. Sei $\pi(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ das Polynom $\pi(x) = x^3 + 2$. Zeigen Sie für Polynome aus $\mathbb{Z}_3[x]$:

1. $(x^3 + 2)^3 = x^9 + 2$.
2. Es gilt $x^8 \equiv x^2 (\operatorname{mod} \pi(x))$, d. h. x^8 ist kongruent zu x^2 modulo $\pi(x)$.

   Hinweis: Bestimmen Sie den Rest bei Division von x^8 durch $\pi(x)$.
3. Der Restklassenring $\langle Z_3[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \rangle$ ist kein Körper.
