

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort! Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Jeder 17-reguläre Graph besitzt eine Eulertour.
 2. Seien $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $E' \subseteq E$, $V' \subseteq V$ nichtleere Mengen. Dann ist $T = (V', E')$ ein Teilgraph von G .
 3. Der Baum mit Prüfer-Code 5, 5, 5 besitzt die Gradfolge 1, 1, 1, 1, 4.
 4. $\langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle$ ist eine Untergruppe von $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.
 5. Es gibt einen Körper mit 4 Elementen.
 6. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $(k \bmod 5) \bmod 2 = (k \bmod 2) \bmod 5$.
 7. Von den 16 verschiedenen 2-stelligen booleschen Operationen $b : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ erfüllt genau eine die Gruppeneigenschaften mit 1 als neutrales Element.
 8. Jede Gruppe mit 7 Elementen ist zyklisch.
-

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch! Die Knotengrade sind nicht gerade.
2. Falsch! Mit einer Kante müssen auch die Endknoten der Kante im Teilgraphen enthalten sein.
3. Wahr! Stern mit 4 Blättern.
4. Falsch! $1 + 1 = 2$, aber $1 +_2 1 = 0$.
5. Wahr! $|GF(2^2)| = 4$.
6. Falsch! $15 \bmod 5 = 0 \neq 1 = 15 \bmod 2 = (15 \bmod 2) \bmod 5$.
7. Wahr! Wenn das neutrale Element gleich 1 ist, dann ist b genau dann eine Gruppenoperation, wenn $b(1, 1) = 1$, $b(1, 0) = 0$, $b(0, 1) = 0$, $b(0, 0) = 1$. Offenbar ist dann b gleich \Leftrightarrow .
8. Wahr! Wäre sie nicht zyklisch, dann gäbe es eine echte Untergruppe mit weniger als 7 Elementen. Nach dem Satz von Lagrange hätte dann 7 einen echten Teiler. Widerspruch!

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien p, q, r Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Sei $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel F_1 an, die nur Vorkommen der booleschen Operatoren \neg und \vee enthält.
2. Sei $F = p \vee (\neg q \vee \neg r)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel F_2 an, die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators \Rightarrow enthält.
3. Sei $F = \neg p \vee (\neg q \vee \neg r)$. Zeigen Sie: Keine Formel F_3 , die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators \Rightarrow enthält, ist äquivalent zu F .

Hinweis: Betrachten Sie die Belegung β mit $\beta(p) = \beta(q) = \beta(r) = 1$.

Hörsaalansage: In einer Formel, die als Operatoren nur Vorkommen von \Rightarrow enthält, kommen auch die Konstanten `true` und `false` nicht vor.

Lösung

1. $F_1 = \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee q)$. (2 P.)

2. $F_2 = r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. (2 P.)

3. Die Belegung β macht jede Formel wahr, die nur Vorkommen der Implikation enthält. (1 P.)

Beweis:

Dies ist klar für Formeln $x \Rightarrow y$ mit entsprechenden Variablen x und y . (1 P.)

Falls die Aussage für Formeln gilt, die n Implikationen enthalten, dann gilt sie auch für Formeln F die $n + 1$ Implikationen enthalten:

Mit entsprechenden Formeln G und H gilt.

$$F = G \Rightarrow H.$$

Mit $[G](\beta) = 1$ und $[H](\beta) = 1$ folgt $[F](\beta) = 1$. (1 P.)

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Beweisen Sie:

1. In jedem $(n - 3)$ -regulären Graphen mit Knotenzahl n besitzt jeder induzierte Teilgraph, der 4 Knoten enthält, mindestens auch 2 Kanten.
2. Sei $G = (V, E)$ ein 3-regulärer Graph, der einen Hamiltonkreis enthält. Dann gibt es zu G auch mindestens 3 (paarweise verschiedene) perfekte Matchings.

Hinweis: Betrachten Sie insbesondere den Teilgraphen von G , der entsteht, wenn man alle Kanten eines Hamiltonkreises entfernt.

Lösung

1. Beweis durch Widerspruch:

Der induzierte Teilgraph habe die Knoten $V' = \{1, 2, 3, 4\}$.

In einem $(n - 3)$ -regulären Graphen muss jeder Knoten mindestens mit einem von 3 beliebigen anderen Knoten über eine Kante verbunden sein.

Dies gilt auch für die Knoten aus V' .

($1\frac{1}{2}$ P.)

Wir nehmen an, dass $\{1, 2\}$ eine Kante ist.

Der Knoten 3 muss mit einem der Knoten $\{1, 2, 4\}$ verbunden sein. Dies ist eine zweite Kante in dem Teilgraph.

($1\frac{1}{2}$ P.)

2. Für G gilt die Formel $\sum_{x \in V} \deg(x) = |V| \cdot 3 = 2|E|$.

Daraus folgt, dass die Knotenanzahl $n = |V|$ geradzahlig ist.

(1 P.)

Entsprechend besitzt ein Hamiltonkreis eine gerade Anzahl von Knoten und Kanten. Die Kantenmenge des Hamiltonkreises kann in zwei Matchings aufgeteilt werden,

(1 P.)

die beide perfekt sind, weil alle Knoten im Hamiltonkreis und damit im Graphen berührt werden.

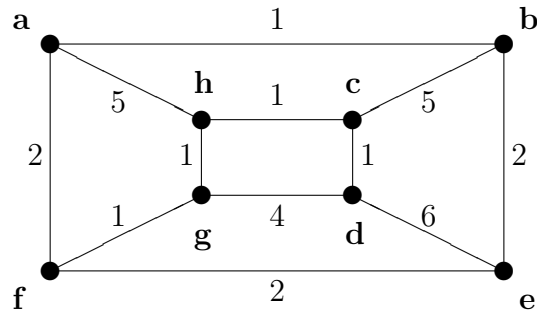
(1 P.)

Entfernt man alle Kanten des Hamiltonkreises aus G , dann erhält man einen induzierten Teilgraphen von G in dem jeder Knoten den Grad 1 besitzt.

Die verbleibenden Kanten bilden damit ein perfektes Matching von G . (1 P.)

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Wir betrachten den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, dessen Kanten mit ganzzahligen Längenangaben g gewichtet sind:



1. Berechnen Sie mithilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung $d(a, d)$ zwischen den Knoten a und d!
Protokollieren Sie dabei die auftretenden Zwischenergebnisse durch Einträge in eine geeignete Tabelle, so dass Ihr Berechnungsweg sichtbar wird.
2. Bestimmen Sie mithilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines minimalen Spannbaums von G . Protokollieren Sie Ihren Berechnungsweg.

Lösung

1. Berechnungsprotokoll mit berechneten Entfernungen u_i .

	b	c	d	e	f	g	h
a	1_{u_1}	6	9	3_{u_3}	2_{u_2}	3_{u_4}	5
		5_{u_6}	7				4_{u_5}
			6_{u_7}				

Ergebnis: $d(a, d) = 6$. (5 P.)

2. Wir beginnen mit $E_T = \emptyset$ und fügen sukzessive zu E_T Kanten mit minimalem Gewicht hinzu, die T kreisfrei belassen.

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \{a, b\}, & w(e_1) &= 1, \\
 e_2 &= \{c, d\}, & w(e_2) &= 1, \\
 e_3 &= \{c, h\}, & w(e_3) &= 1, \\
 e_4 &= \{f, g\}, & w(e_4) &= 1, \\
 e_5 &= \{g, h\}, & w(e_5) &= 1, \\
 e_6 &= \{a, f\}, & w(e_6) &= 2, \\
 e_7 &= \{b, e\}, & w(e_7) &= 2.
 \end{aligned}$$

(2 P.)

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Die Stirlingzahlen zweiter Art $S_{n,k}$ erfüllen für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.

1. Beweisen Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = 2^n - 1.$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{i,2} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}.$$

Wenden Sie die Gleichung $\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} S_{i,2} = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] S_{i,2}$ für den Induktionsschluss an und nutzen Sie anschließend teilweise die Rekursion für die Stirlingzahlen! Beachten Sie $S_{1,2} = 0$ und $\binom{n}{n+1} = 0$.

Lösung

1.
$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} \right) - \binom{n}{0} = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1. \quad (2 \text{ P.})$$

2. (a) Induktionsanfang $n = 1$:

l. Seite = $\sum_{i=1}^1 \binom{1}{i} S_{i,2} = \binom{1}{1} \cdot 0 = 0$.

r. Seite = $\frac{3^1 - 2^{1+1} + 1}{2} = 0$. (1 P.)

- (b) Induktionsschluss von n auf $n + 1$ für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} S_{i,2} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] S_{i,2} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i+1,2} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{i,2} \quad (1 \text{ P.}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (S_{i,1} + 2 \cdot S_{i,2}) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{i,2} \quad (1 \text{ P.})$$

$$= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + 3 \cdot \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{i,2} \quad (1 \text{ P.})$$

$$= (2^n - 1) + 3 \cdot \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \quad (\frac{1}{2} \text{ P.})$$

$$= \frac{1}{2} (2^{n+1} - 2 + 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 3)$$

$$= \frac{1}{2} (3^{n+1} - 2^{n+2} + 1). \quad (\frac{1}{2} \text{ P.})$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Die Menge der Permutationen der Teilmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen bildet zusammen mit der Komposition \circ von Abbildungen die Gruppe \mathcal{S}_4 . Das neutrale Element der Gruppe sei id . Wir betrachten die in Zyklusschreibweise gegebenen Permutationen

$$p = (1, 2)(3)(4) \quad \text{und} \quad q = (1)(2)(3, 4).$$

1. p und q sind involutorisch, d.h. $p \circ p = id$ und $q \circ q = id$.
Zeigen Sie $p \circ p = id$.

2. Zeigen Sie, dass $p \circ q = q \circ p$ gilt.

Seien $r = p \circ q$ und $U = \{id, p, q, r\}$.

3. Geben Sie eine \circ -Verknüpfungstafel an für die Elemente aus U .
4. Beweisen Sie, dass die Menge U mit jedem Element $x \in U$ auch sein Inverses x^{-1} enthält (mit $x \circ x^{-1} = id$).
5. Aus den obigen Aussagen folgt, dass U eine Untergruppe von \mathcal{S}_4 ist.
Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ isomorph zur Gruppe U ? Begründung!

Lösung

1. $(p \circ p)(1) = p(p(1)) = p(2) = 1$, $(p \circ p)(2) = p(p(2)) = p(1) = 2$,
 $(p \circ p)(3) = p(p(3)) = p(3) = 3$, $(p \circ p)(4) = p(p(4)) = p(4) = 4$.
(1 P.)

2. $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Daraus folgt $p \circ q = q \circ p$.
(1 P.)

3.

\circ	id	p	q	r
id	id	p	q	r
p	p	id	r	q
q	q	r	id	p
r	r	q	p	id

(2 P.)

4. Für jedes Element $x \in U$ gilt $x^2 = id$. Damit ist jedes Element zu sich selbst invers.
(1 P.)

5. Jedes Element aus U ist von der Ordnung 1 oder 2. Also ist U nicht zyklisch.
Im Gegensatz dazu ist aber $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ zyklisch und kann deshalb nicht zu U isomorph sein.
(2 P.)

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $a(x) = x^4 + x^3 + 3$ und $b(x) = 3x^2 + 4$ aus dem Polynomring $\mathbb{Z}_5[x]$ über dem Körper \mathbb{Z}_5 .

1. Wie viele Elemente enthält die Menge R_b aller Polynome $r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(b)$?
 2. Bestimmen Sie Polynome $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$, so dass gilt $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$ mit $\text{grad}(r) < 2$.
-

Lösung

1. $|R_b| = 25$. (2 P.)

2. Division:

$$\begin{array}{r} \overbrace{x^4 + x^3 + 3}^{a(x)} \quad (\text{div}) \quad \overbrace{3x^2 + 4}^{b(x)} = 2x^2 \quad (1 \text{ P.}) \\ - \quad (x^4 + 3x^2) \\ \hline x^3 + 2x^2 + 3 \quad \quad \quad + 2x \quad (1 \text{ P.}) \\ - \quad (x^3 + 3x) \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \quad \quad \quad + 4 \quad (1 \text{ P.}) \\ - \quad (2x^2 + 1) \quad \quad \quad q(x) = \frac{\quad}{2x^2 + 2x + 4} \quad (1 \text{ P.}) \\ \hline 2x + 2 = r(x) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1 \text{ P.}) \end{array}$$