Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Lösungsblatt Mittelklausur
7. Januar 2010

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede reflexive Relation $R \subseteq \{a,b\} \times \{a,b\}$ ist transitiv.
2. Für jede binäre Relation S über einer endlichen Menge gilt $|S \circ S| = |S|^2$.
   ($\circ$ bezeichnet das Kompositionsprodukt von Relationen.)
3. Die Formel $(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \wedge (\exists u\, \forall v\, \neg P(u,v))$ ist erfüllbar.
4. $f(n) = 2{\cdot}3^n \in O(3{\cdot}2^n)$.
5. Seien A und B prädikatenlogische Formeln. Falls $A \vdash B$ und $B \models A$ gelten, dann ist $A \Leftrightarrow B$ allgemeingültig.
6. Der Binomialkoeffizient von xy^2z in dem ausmultiplizierten Produkt $(x+y+z)^4$ ist durch 24 teilbar.

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Wahr!
   Seien $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Dann gilt $x = y$, $x = z$ oder $y = z$. In allen Fällen folgt $(x,z) \in R$, da R reflexiv ist.
2. Falsch!
   Sei $S = \{(1,2)\}$. Dann gilt $S \circ S = \emptyset$. Es folgt $|S \circ S| = 0 \neq 1 = |S|$.
3. Falsch!
   Nach DeMorgan gilt
   $(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \wedge (\exists u\, \forall v\, \neg P(u,v)) \equiv (\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \wedge (\neg \forall x\, \exists y\, P(x,y)) \equiv \mathsf{false}$.
4. Falsch!
   Für alle $c > 0$ und $n \geq \frac{c - \ln 2 + \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$ gilt $2{\cdot}3^n > c \cdot 3{\cdot}2^n$.
5. Wahr!
   Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt die Gültigkeit von $A \Rightarrow B$. Andererseits bedeutet $B \models A$ die Gültigkeit von $B \Rightarrow A$.
6. Falsch!
   Der gesuchte Binomialkoeffizient ist $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

1. Wie viele binäre boolesche Operationen $\odot$ gibt es, so dass

$$x \odot \textbf{false}$$

   ein Widerspruch ist?

2. Sei $\odot$ eine beliebige binäre boolesche Operation, so dass $x \odot \textbf{false}$ ein Widerspruch ist. Zeigen Sie, dass dann die Formel

$$(x \odot (y \Leftrightarrow z)) \Rightarrow ((x \odot y) \Leftrightarrow (x \odot z))$$

   eine Tautologie ist.

   Hinweis: Untersuchen Sie getrennt die passenden minimalen Belegungen β, für die $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 1$ bzw. für die $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 0$ gilt.

Lösung

1. Antwort: 4. (2 P.)
   Es sei $[\odot]$ die Wahrheitsfunktion, die dem Operator $\odot$ zugeordnet ist.
   Dann gelten $[\odot]((0,0)) = 0$ und $[\odot]((1,0)) = 0$.

   Die 2 Funktionswerte $[\odot]((0,1))$ und $[\odot]((1,1))$ können beliebig aus $\{0,1\}$ gewählt werden. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten.

2. Wir bezeichnen $F = (x \odot (y \Leftrightarrow z)) \Rightarrow ((x \odot y) \Leftrightarrow (x \odot z))$.

   Fall 1, $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 0$:

   Dann gilt $[x \odot (y \Leftrightarrow z)](\beta) = 0$ und $[F](\beta) = 1$. (1 P.)

   Fall 2, $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 1$:

   Falls $[x \odot (y \Leftrightarrow z)](\beta) = 0$ gilt, dann folgt $[F](\beta) = 1$. (1 P.)

   Falls $[x \odot (y \Leftrightarrow z)](\beta) = 1$, dann können wir die Wahrheitstabelle für die zu beweisende Tautologie einschränken auf den Fall, dass $[(x \odot (y \Leftrightarrow z)](\beta) = 1$ und $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 1$ gelten.

x	y	z	$(x$	$\odot$	$(y \Leftrightarrow z))$	$\Rightarrow$	$((x \odot y)$	$\Leftrightarrow$	$(x \odot z))$
0	0	0		1	1	1	0	1	0
0	1	1		1	1	1	1	1	1
1	0	0		1	1	1	0	1	0
1	1	1		1	1	1	1	1	1

(2 P.)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln F und G, die Gleichheitszeichen enthalten dürfen.

1. Wir modellieren 3-elementige Mengen. Geben Sie eine Formel F an, so dass für jede zu F passende Struktur $S = (U_S, I_S)$ mit $[F](S) = 1$ gilt:

$$|U_S| = 3\,.$$

2. Sei $Kgl(x, y)$ ein zweistelliges Prädikatensymbol, und sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Strukturen $S = (U_S, I_S)$ mit

   - $U_S = \mathbb{N}_0$ und
   - $I_S(Kgl) = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n_1 \leq n_2\}$.

   Sei $Maximum(x, y, z)$ ein dreistelliges Prädikatensymbol. Geben Sie eine Formel G an, so dass jede Struktur $S \in \mathcal{S}$, für die $I_S(Maximum)$ definiert ist, folgendes erfüllt: $[G](S) = 1$ genau dann, wenn

$$I_S(Maximum) = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}_0^3 \mid n_3 \text{ ist das Maximum von } n_1 \text{ und } n_2\}\ .$$

Lösung

1. $$F = \exists a\, \exists b\, \exists c\ \ [\neg(a{=}b) \wedge \neg(a{=}c) \wedge \neg(b{=}c) \qquad (1\tfrac{1}{2}\text{ P.})$$
$$\wedge\quad \forall x\ (x{=}a \vee x{=}b \vee x{=}c)\,]\,. \qquad (1\tfrac{1}{2}\text{ P.})$$

2. $$G = \forall x\, \forall y\, \forall z\quad Maximum(x, y, z) \Leftrightarrow$$
$$[(Kgl(x, y) \Rightarrow z = y) \wedge (Kgl(y, x) \Rightarrow z = x)] \qquad (3\text{ P.})$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksspiel „4 aus 25“, bei dem 4 Zahlen aus [25] gezogen werden.

1. Wir lassen zu, dass Zahlen mehrfach gezogen werden, insgesamt aber nur 4 Mal eine Zahl gezogen wird.

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es?

   Hörsaalansage: Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Zahlen an.

2. Nun ändern wir die Bedingungen für Ziehungen so, dass nur verschiedene Zahlen und nie zwei benachbarte Zahlen n und $n+1$ gezogen werden. (D. h., dass Ziehungen mit benachbarten Zahlen, z. B. $2, 5, 6, 17$, nicht zulässig sind.)

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es in diesem Fall?
   Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für das Ergebnis an.

   Hinweis: Sie können die Aufgabe zurückführen auf das Modell der Verteilung von gleichen Bällen auf unterscheidbare Urnen.

Allgemeiner Hinweis: Binomialkoeffizienten brauchen nicht als Dezimalzahl ausgewertet zu werden.

Lösung

1. Gefragt ist nach der Anzahl anz der 4-elementigen Multiteilmengen von 25. Es gilt

$$anz = \binom{25+4-1}{4} = \binom{28}{4}.$$

(2 P.)

2. Markieren wir die 4 gezogenen Zahlen mit $\square$ und 3 dazwischenliegende Zahlen mit $\circ$, dann können wir als Platzhalter für die restlichen 18 Zahlen in das Wort $\square\circ\square\circ\square\circ\square$ beliebig die Zeichen $|$ einstreuen.

   Dies bedeutet, dass wir die Anzahl anz der Wörter $w \in \{\square, |\}^*$ der Länge 22 suchen, die 4 Zeichen $\square$ und 18 Zeichen $|$ enthalten. Es gilt

$$anz = \binom{22}{4}.$$

(4 P.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Waggons (Eisenbahnwagen) werden zu Zügen (Sequenzen von Waggons) unterschiedlicher Länge $n \in \mathbb{N}_0$ zusammengestellt, wobei es auf die Reihenfolge der Waggons hinter der Lokomotive ankommen soll. Jeder einzelne Waggon unterscheidet sich von allen anderen. Es kommt auch vor, dass Lokomotiven ohne Waggons fahren.

1. Wie viele Züge gibt es, wenn 6 Waggons zur Verfügung stehen? Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an und begründen Sie dieses.

2. Je nach Art des Zuges sieht ein Betriebsplan die Zuordnung von einem, zweien oder dreien der Zugführer A, B und C zu jedem Zug vor.

   Jeder der 3 Zugführer kommt auf 55 Prozent der Züge zum Einsatz.
   In 30 Prozent der Züge treffen sich A und B,
   in 30 Prozent der Züge treffen sich A und C
   und in 20 Prozent der Züge treffen sich B und C.

   Wie groß ist der Prozentsatz der Züge, in denen alle Zugführer gemeinsam eingesetzt werden, gemessen an der Gesamtzahl der eingesetzten Züge?

Lösung

1. Jede Sequenz von Waggons, insbesondere auch die leere Sequenz, ist ein Zug. Gefragt ist also nach der Anzahl *anz* der Variationen über einer 6-elementigen Menge. Antwort:

$$anz = \sum_{n=0}^{6} 6^{\underline{n}} = 720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1 = 1957\,.$$

(2 P.)

2. Der Prozentsatz ist 15. (2 P.)

   Sei Z die Menge von Zügen. Dann sind die Mengen A_z, B_z und C_z definiert durch $A_z = \{x \in Z \mid A \text{ ist Zugführer auf } x\}$, $B_z = \{x \in Z \mid B \text{ ist Zugführer auf } x\}$ und $C_z = \{x \in Z \mid C \text{ ist Zugführer auf } x\}$.

   Dann ist gefragt nach dem Prozentsatz für $|A_z \cap B_z \cap C_z|$ von $|Z|$.

   Nach dem Inklusions/Exlusions-Satz gilt pro Hundert

$$\begin{aligned} 100 = |Z| &= |A_z \cup B_z \cup C_z| \\ &= |A_z| + |B_z| + |C_z| \\ &\quad - |A_z \cap B_z| - |A_z \cap C_z| - |B_z \cap C_z| \\ &\quad + |A_z \cap B_z \cap C_z| \\ &= 3 \cdot 55 - 30 - 30 - 20 + |A_z \cap B_z \cap C_z| \end{aligned}$$

(2 P.)