Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Lösungsblatt 1
29. Oktober 2009

Diskrete Strukturen

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf mathematischen Schulstoff. Insbesondere wird die Durcharbeitung des Arbeitsblattes 1 vorausgesetzt.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Ist -1 ein Teiler von 5? Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler von 981 und 987 an und begründen Sie Ihr Ergebnis!

2. Beschreiben Sie informell ein einfaches Verfahren, mit dem man für beliebige natürliche Zahlen a und b feststellen kann, ob a ein Teiler von b ist! Gibt es für je zwei natürliche Zahlen a, b stets einen größten gemeinsamen Teiler ($ggT(a, b)$)? Begründung!

3. Beschreiben Sie informell ein Verfahren, mit dem man zu jeder natürlichen Zahl a mit $1 < a$ eine Primzahl p finden kann, die Teiler von a ist.

Lösung

1. -1 ist ein Teiler von 5.

   Wenn man dies zeigen wollte (was aber hier nicht verlangt ist), dann zeigt man zunächst die Gleichung $(-1)\cdot(-5) = 5$ durch Rückführung auf die im Arbeitsblatt 1, Vorbereitung 1 genannten bzw. bewiesenen Eigenschaften ganzer Zahlen. Offenbar gibt es also eine ganze Zahl g, nämlich $g = -5$, so dass $(-1) \cdot g = 5$ gilt. Daraus folgt nach Definition, dass -1 ein Teiler von 5 ist.

   Es gilt $ggT(981, 987) = 3$.

   Begründung: Sei x ein gemeinsamer Teiler von 981 und 987. Dann gilt definitonsgemäß mindestens $x \cdot y_1 = 981$ und $x \cdot y_2 = 987$ für geeignete y_1, y_2. Daraus folgt aber $x(y_2 - y_1) = x \cdot y_2 - x \cdot y_1 = 987 - 981 = 6$. Damit ist x Teiler von 6.

   Die Teiler von 6 sind $1, 2, 3, 6$. Da 2 offenbar kein gemeinsamer Teiler von 981 und 987 ist, kommt nur 3 als gemeinsamer Teiler in Frage. Tatsächlich gilt $981 = 3 \cdot 327$ und $987 = 3 \cdot 329$.

2. Falls $a = b$, dann ist a Teiler von b.

   Wir nehmen $a < b$ an. Dann prüfen wir für alle k mit $1 < k < b$ die Gleichung, $a \cdot k = b$. Falls die Gleichung für kein solches k gilt, dann ist a nicht Teiler von b. Andernfalls ist a ein Teiler von b.

   Der $ggT(a, b)$ existiert für alle natürlichen a, b.

   Begründung: Da 1 stets ein Teiler ist, genügt es die positiven Teiler von a zu betrachten. Da kein Teiler von a größer ist als a, besitzt a nur endlich viele positive Teiler, von denen einer der gesuchte $ggT(a, b)$ sein muss, denn mindestens die 1 ist immer gemeinsamer Teiler und aus endlich vielen Zahlen kann man stets die Größte auswählen.

3. Zunächst kann man die endlich vielen positiven Teiler s von a bestimmen. Dann prüft man alle diese Teiler s, ob Sie ihrerseits Teiler besitzen, die ungleich 1 und ungleich s sind. Wenn s keine solche Teiler besitzt, dann ist s eine Primzahl, die Teiler ist von a.

   Mit dieser Methode findet man sogar alle Teiler von a, die prim sind.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Für Zahlen s und t heißt $m = (s + t)/2$ das *arithmetische Mittel* von s und t. Man zeige für rationale Zahlen $s < t$, dass dann $s < m < t$ gilt!

2. Zwischen je zwei rationalen Zahlen s und t liegen unendlich viele rationalen Zahlen. Man sagt deshalb, dass die rationalen Zahlen *dicht* liegen. Zeigen Sie: wenn s und t rationale Zahlen sind mit $s < t$, dann gibt es unendlich viele rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ mit $s < r_1 < r_2 < \ldots < t$.

Lösung

1. Seien $s = \frac{a}{b}$ und $t = \frac{c}{d}$ mit $ad < bc$. Dann gilt $m = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/\frac{2}{1} = \frac{ad+bc}{2bd}$. Um $s < m$ bzw. $m < t$ zu zeigen, ist $2bda < b(ad + bc)$ bzw. $(ad + bc)d < 2cbd$ nachzuweisen. Wegen $ad < bc$ folgt aber $2bda = bad + bad < bad + bbc = b(ad + bc)$ bzw. $(ad + bc)d < (bc + bc)d = 2cbd$.

2. Das arithmetische Mittel kann beliebig oft gebildet werden mit $r_1 = m$ und $r_{i+1} = (r_i + t)/2$. Alle r_i sind paarweise verschieden und es gilt $s < r_1 < r_2 < \ldots < t$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl. Dann bezeichnet y^n das Produkt mit n Faktoren y.
Eine Zahl y heißt eine n-te Wurzel aus x, i. Z. $y = x^{\frac{1}{n}}$, wenn $y^n = x$ gilt. Zeigen Sie:
Wenn $5^{\frac{1}{3}} = \frac{m}{n}$ gilt, dann gibt es m' und n' mit $m' < m$ und $n' < n$, so dass $5^{\frac{1}{3}} = \frac{m'}{n'}$.
Was bedeutet dies für die Frage, ob $5^{\frac{1}{3}}$ eine rationale Zahl ist?

Lösung

Bemerkung: mit m, n, m', n' sind letztendlich stets natürliche Zahlen gemeint. Eine zukünftige Aufgabenstellung sollte dies besser a priori klarstellen.

Wenn $5^{\frac{1}{3}}$ rational ist, dann gilt $5^{\frac{1}{3}} = \frac{m}{n}$. Nach Definition folgt $5 = (\frac{m}{n})^3 = \frac{m^3}{n^3}$. Daraus folgt $5 \cdot n^3 = m^3$. Nun ist aber 5 eine Primzahl und teilt einen der Faktoren auf der rechten Seite, also jedenfalls m. Wir setzen $m = 5m'$ und erhalten die Gleichung $5 \cdot n^3 = 5^3 \cdot m'^3$, mithin $n^3 = 5^2 \cdot m'^3$, d. h. 5 ist ein Teiler von n^3. Dann ist 5 auch auch Teiler von n, d. h. $n = 5n'$, und wir erhalten $5^3 \cdot n'^3 = 5^2 \cdot m'^3$, mithin $5 \cdot n'^3 = m'^3$.

Wir fassen zusammen: Aus $5 \cdot n^3 = m^3$ folgt $5 \cdot n'^3 = m'^3$ mit $m' < m$ und $n' < n$.

Dies kann aber nicht wahr sein, weil man nun durch Wiederholung der Konstruktion Zähler und Nenner beliebig kleiner machen könnte. Es kann also nicht sein, dass $5^{\frac{1}{3}}$ eine rationale Zahl ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Addition zweier reeller Zahlen $a = 0{,}a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ und $b = 0{,}b_1 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$ kann dann durch stellenweise Addition $c_i = a_i + b_i$ für $c = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots c_n c_{n+1} \ldots$ erfolgen, wenn $c_i \leq 9$ für alle i gilt. Falls für ein gewisses j aber $c_j > 9$ gilt, muss man einen Stellenübertrag $\ddot{u} = 1$ auf c_{j-1} berücksichtigen, was dazu führen kann, dass weitere Übertrage an den Stellen n mit $n < j - 1$ zu berücksichtigen sind.

Entwickeln Sie eine Vorschrift für die Bestimmung der n-ten Stelle einer korrekten Darstellung der Summe zweier reeller Zahlen $a = 0, a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ und $b = 0, b_1 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$.

Hinweis: Mathematiker benutzen Fallunterscheidungen unabhängig davon, ob man effektiv bestimmen kann, welcher Fall vorliegt.

Lösung

Wir berechnen n Stellen von $a + b$ für beliebiges n wie folgt:
Wir suchen erst eine Stelle j mit $j > n$, so dass $c_j > 9$ gilt.
Fall 1: es gibt eine solche Stelle: Dann schneiden wir die Dezimalbrüche von a und b nach der Stelle j ab und summieren wie bei endlichen Dezimalbrüchen. Dadurch erhalten wir mindestens die ersten n Stellen.
Fall 2: es gibt keine solche Stelle: Dann übernehmen wir alle c_i.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* <u>*Vorbereitungsaufgabe*</u>*,* <u>*Tutoraufgabe*</u> *und* <u>*Hausaufgabe*</u> *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt.*

Vorbereitung 1

Wir wissen, wie man aus einer natürlichen Zahl n die nächste natürliche Zahl $n+1$ gewinnt. Damit besitzen wir das Bildungsgesetz der generativen Aufschreibung $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ unserer ersten unendlichen Menge. Sie wird als ungeordnete Zusammenfassung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen zu einer Menge $\mathbb{N}$ konstruiert. Davon ausgehend konstruiert man dann die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Diese Mengen können wir nun als Universum oder Grundmenge benützen.

1. Vergleichen Sie die durch die Aufschreibungen $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 7, 5, 3\}$, $\{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $\{1+2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{1+|2n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ definierten Mengen. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

2. Wir betrachten die Mengen $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{|-1|^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$, $\{-1, 1\}$. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

3. Wir betrachten hierarchische Mengen- und Tupelstrukturen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente bzw. Komponenten besitzen jeweils die Objekte $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$, $(1, 1, 1, \ldots, 1^n)$, $\{1, 1, 1, \ldots, 1^n\}$, $\{(1, 1), (1, 1)\}$, $(\{1, 1\}, \{1, 1\})$?

4. Eine intensionale Beschreibung $M = \{x \in U \mid P(x)\}$ gibt an, welche Eigenschaft P ein Element x eines Universums U haben muss, um in M enthalten zu sein. Geben Sie eine intensionale Beschreibung an für die Mengen $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{1+2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$!

Lösung

1. Mengen sind ungeordnete Zusammenfassungen von Objekten. Ein bestimmtes Objekt kommt immer nur ein einziges Mal vor, auch wenn es in einer aufzählenden (extensionalen) Schreibweise mehrfach genannt wird. Es folgt

   $$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 7, 5, 3\} = \{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}\,.$$

   Die Gleichheit von Mengen wird überprüft, indem festgestellt wird, ob jedes Element der einen Menge in der anderen Menge enthalten ist und umgekehrt.

   Die übrigen drei Mengen sind unendlich und deshalb nicht gleich mit einer der vorgenannten Mengen. Zum Beweis der Ungleichheit genügt es festzustellen, dass die Zahl 11 in den ersten 3 Mengen nicht enthalten ist, wohl aber in den übrigen Mengen.

   Offenbar gilt $\{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{1 + 2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, weil die erste Aufschreibung genau das Bildungsgesetz informell nahelegt, das in der zweiten Aufschreibung explizit gemacht wird. Definiert wird in beiden Fällen die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Beweis der Gleichung $A = \{1 + 2n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{1 + |2n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = B$ wie folgt:

Sei $x \in A$. Dann gilt $x = 1 + 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $2n = |2n|$ und $n \in \mathbb{Z}$ folgt $x = 1 + |2n|$, mithin nach Definition $x \in B$.

Sei umgekehrt $x \in B$. Dann gilt $x = 1 + |2n|$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $|2n| = 2|n|$ und $|n| \in \mathbb{N}_0$ folgt $x = 1 + 2|n| \in A$.

2. Zunächst gilt $\{1, -1, 1, -1, \ldots\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$. Und es gilt $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$, denn offenbar beschreibt die rechte Seite der Gleichung nur informell die linke Seite.

   Es gilt aber $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$, denn $(-1)^n = 1$ oder $(-1)^n = -1$.

   Schließlich gilt $\{|-1|^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$, da $|-1|^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Es gilt

   $|\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}| = 2^n\,, \quad |\{1, 1, 1, \ldots, 1^n\}| = 1 \quad \text{und} \quad |\{(1, 1), (1, 1)\}| = 1\,.$

   Die Anzahl der Komponenten von $(1, 1, 1, \ldots, 1^n)$ ist n,
   die Anzahl der Komponenten von $(\{1, 1\}, \{1, 1\})$ ist 2.

4. Es gilt $\{x \in \mathbb{Z} \mid x{=}1 \text{ oder } x{=}{-1}\} = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und
   $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ ist Teiler von } x{+}1\} = \{1{+}2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Vorbereitung 2

Ausgehend von bereits gebildeten Mengen kann man weitere Mengen gewinnen z. B. durch die Operationen Vereinigung $.\cup.$, Durchschnitt $.\cap.$, Differenz $.\setminus.$, symmetrische Differenz $\Delta(\,.\,,\,.\,)$, Komplement $\overline{(\,.\,)}$.

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Beschreiben Sie A als Durchschnitt 5-elementiger Mengen, als Vereinigung 3-elementiger Mengen, als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen, als Komplement einer Menge, als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen!

   Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste!

Für beliebige Mengen A und B kann man obige Operationen in beliebiger Auswahl und beliebig oft auf die jeweiligen Ergebnisse anwenden. Dann aber stellt sich die Frage, wie viele Mengen man auf diese Weise höchstens erhalten kann. Tatsächlich kann diese Frage durch ein Venn-Diagramm entschieden werden.

2. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und dem umfassenden Universum $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele verschiedene Mengen können innerhalb dieses Diagramms definiert werden? Geben Sie jeweils an, durch welche Operationsanwendungen diese Mengen aus A und B gewonnen werden können.

Lösung

1. (a) $\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,6\} = A\,.$

   (b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} = A\,.$

   (c) $\{1,2\} \cup \{3,4\} = A\,.$

   (d) Wir setzen $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 5 \leq x\}$ und betrachten die Komplementbildung von B bezüglich $\mathbb{N}$. Dann gilt $x \in \overline{B}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{N}$ und gleichzeitig x nicht in B gilt. Letzteres heißt aber $x \in \mathbb{N}$ und $5 \not\leq x$, d. h. $x \in \mathbb{N}$ und $x < 5$. Nach Definition heißt das $\overline{B} = A\,.$

   (e) Seien $B = \{1,2,5\}$ und $C = \{3,4,5\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B\Delta C &= (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \\ &= (\{1,2,5\} \setminus \{3,4,5\}) \cup (\{3,4,5\} \setminus \{1,2,5\}) \\ &= \{1,2\} \cup \{3,4\} \\ &= \{1,2,3,4\} \;=\; A\,. \end{aligned}$$

   (f) Man kann wie folgt sortieren: Wir listen zuächst alle Teilmengen auf, die die 1 enthalten, und anschließend die Teilmengen, die die 1 nicht enthalten. Das entsprechende Sortierverfahren wenden wir für beide Hälften an mit der 2 als Kriterium usw.. Wir erhalten die 16 Teilmengen wie folgt.

$$\begin{array}{llll} \{1,2,3,4\}\,, & \{1,2,3\}\,, & \{1,2,4\}\,, & \{1,2\}\,, \\ \{1,3,4\}\,, & \{1,3\}\,, & \{1,4\}\,, & \{1\}\,, \\ \{2,3,4\}\,, & \{2,3\}\,, & \{2,4\}\,, & \{2\}\,, \\ \{3,4\}\,, & \{3\}\,, & & \\ \{4\}\,, & \{\}\,. & & \end{array}$$

2. (Zeichnung Venn-Diagramm: symbolische Kreise um die Elemente 1 und 2 bzw. 2 und 3 bzw. 1, 2, 3 und 4)

   Wegen $|U| = 4$ besitzt U genau 16 Teilmengen. Tatsächlich kann man alle diese 16 Mengen aus den Mengen A und B durch Operationsanwendungen gewinnen, z. B. wie folgt.

$$\begin{array}{rlrlrlrl} A \cap B &= \{2\}\,, & \overline{A} \cap B &= \{3\}\,, & A \cap \overline{B} &= \{1\}\,, & \overline{A} \cap \overline{B} &= \{4\}\,, \\ A \cup B &= \{1,2,3\}\,, & \overline{A} \cup B &= \{2,3,4\}\,, & A \cup \overline{B} &= \{1,2,4\}\,, & \overline{A} \cup \overline{B} &= \{1,3,4\}\,, \\ \overline{A} &= \{3,4\}\,, & \overline{B} &= \{1,4\}\,, & \Delta(A,B) &= \{1,3\}\,, & \overline{\Delta(A,B)} &= \{2,4\}\,, \\ A &= \{1,2\} & B &= \{2,3\}\,, & A \cup \overline{A} &= \{1,2,3,4\}\,, & A \cap \overline{A} &= \{\}\,. \end{array}$$

   Natürlich könnte man A durch $(A \cup \overline{A}) \setminus \overline{A}$ zurückgewinnen, entsprechend auch B. Das ist aber nicht notwendig, wenn man einen „Identitätsoperator“ hinzunimmt, der zu jeder Menge sie selbst wieder zurückliefert.

   Hinweis: Die erste Zeile enthält bereits die wichtigsten Teilmengen des Venn-Diagramms. Dies sind genau die vier disjunkten Teilmengen, aus denen man alle anderen Teilmengen durch Vereinigung darstellen kann. Sogar die leere Menge kann man aus diesem Prinzip heraus bekommen, und zwar durch eine „leere Vereinigung“.

Wir haben hier schon Mal, salopp gesprochen, einen Köder ausgelegt, der uns auf der Spur der Vereinigung disjunkter Mengen von den Venn-Diagrammen bis weit in die Logik zu Booleschen Normalformen beliebiger logischer Ausdrücke führen wird. Das wird noch spannend!

Vorbereitung 3

Wir fassen die Buchstaben a, b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.
2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b, und b kommt vor c, und insgesamt kommt a auch vor c).

   Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!
3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!
4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Lösung

1. Bei Tupel können Objekte mehrfach vorkommen und es kommt auf die Reihenfolge an.
$$\begin{array}{lll} aa\,, & ab\,, & ac\,, \\ ba\,, & bb\,, & bc\,, \\ ca\,, & cb\,, & cc\,. \end{array}$$
2. Die gesuchte Anzahl ist $1 + (1 + 2) + ((1 + 2) + 3) = 10$.

   Die Begründung ist durch die folgende Auflistung gegeben.
$$\begin{array}{lll} aaa\,, & aab\,, & aac\,, \\ abb\,, & abc\,, & \\ acc\,, & & \\[1ex] bbb\,, & bbc\,, & \\ bcc\,, & & \\[1ex] ccc\,. & & \end{array}$$
3. Antwort: Nein!

   Da R reflexiv ist, enthält R mindestens alle Paare (x, x) für $x \in \Sigma$. Wegen $|\Sigma| = 3$ folgt also $|R| \geq 3$.
4. Das Relationenprodukt $S \circ S$ enthält genau alle Paare (x, z), die aus einer geeigneten "Verkettung" $(x, y) \in S$ mit $(y, z) \in S$ hervorgehen. Man muss nur jeweils ein geeignetes $y \in \Sigma^*$ finden.

Für $x = ab, z = ca$ liefert gerade $y = bc$ das Gewünschte. Daraus folgt $(ab, ca) \in S \circ S$.

Offenbar gibt es aber keine anderen Verkettungsmöglichkeiten, so dass $S \circ S = \{(ab, ca)\}$ gilt.

Wir bezeichnen im Folgenden das Bild bzw. das Urbild einer Relation $R \subseteq A \times B$ mit $Bild(R)$ bzw. $Urbild(R)$. Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned} Bild(R) &= \{y \mid \text{es gibt ein Paar } (x, y) \in R\}, \\ Urbild(R) &= \{x \mid \text{es gibt ein Paar } (x, y) \in R\}. \end{aligned}$$

Es folgt $Bild(S \circ S) = \{ca\}$ und $Urbild(S \circ S) = \{ab\}$.

Tutoraufgabe 1

1. Wir definieren intensional $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ und } 3 \text{ sind nicht Teiler von } x\}$.

   (a) Die aufzählende (extensionale) Beschreibung $B = \{1, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ einer Menge B legt ein vernünftiges aufzählendes Bildungsgesetz nahe. Welches?

   (b) Wir betrachten $C = \{1 + \sum_{i=1}^{n} (3 - (-1)^i) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
   Zeigen Sie die Mengengleichheit $A = C$!

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{(\sqrt{-1})^n \mid n \in \mathbb{N}\})$?

Lösung

1. (a) Beginnend bei 1 erzeugen wir nacheinander Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, indem wir abwechselnd 2 oder 4 zur letzterzeugten Zahl hinzuzählen. Wenn also $a_1, \ldots, a_n$ bereits erzeugt sind, dann addieren wir 2 zu a_n, wenn n gerade war, und 4 zu a_n, wenn n ungerade war. Dieses Verfahren denken wir uns unendlich fortgesetzt und fassen alle erzeugten Elemente zu einer Menge zusammen.

   (b) Vorbemerkung: Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} a_i$ für n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ bedeutet den Wert, den man durch Aufaddierung aller a_i erhält. Für $n = 0$ wird stets $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ gesetzt, weil das sinnvoll ist, wenn der Summenausdruck selbst in einem additiven Ausdruck vorkommt. Beispielsweise gilt $1+\sum_{i=1}^{n} (3-(-1)^i) = 1$ für $n = 0$.

   Stellt man $\mathbb{N}$ als Vereinigung aller 6-elementigen Mengen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, ..., $\{6k+1, \ldots, 6k+6\}, \ldots$ für $k \in \mathbb{N}_0$ dar, dann erhält man A offenbar durch Streichen des zweiten, dritten, vierten und letzten Elements der Mengen $\{6k + 1, \ldots, 6k + 6\}$.

   Dies folgt aus der Tatsache, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
   2 und 3 sind keine Teiler von x genau dann, wenn 2 und 3 keine Teiler von $x + 6k$ sind. Anders ausgedrückt: Wenn 2 (bzw. 3) Teiler von x ist, dann ist 2 (bzw. 3) Teiler von $x + 6k$, und umgekehrt, wenn 2 (bzw. 3) Teiler von $x + 6k$ ist, dann ist 2 (bzw. 3) Teiler von x.

   Das bedeutet aber $A = \{1 + 6k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{5 + 6k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Wegen $\sum_{i=1}^{2k} (3-(-1)^i) = 6k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt nun

$$
\begin{aligned}
A &= \{1 + \sum_{i=1}^{2k} (3-(-1)^i) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{1+4+\sum_{i=1}^{2k} (3-(-1)^i) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
&= \{1 + \sum_{i=1}^{2k} (3-(-1)^i) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{1 + \sum_{i=1}^{2k+1} (3-(-1)^i) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
&= \{1 + \sum_{i=1}^{n} (3-(-1)^i) \mid n \in \mathbb{N}_0\}.
\end{aligned}
$$

2. Wegen $i^4 = 1$ gilt $\{(\sqrt{-1})^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{i, i^2, i^3, i^4\}$. Da die komplexen Zahlen i, i^2, i^3, i^4 paarweise voneinander verschieden sind, gilt $|\{(\sqrt{-1})^n \mid n \in \mathbb{N}\}| = 4$.

   Es folgt $|\mathcal{P}(\{(\sqrt{-1})^n \mid n \in \mathbb{N}\})| = 2^4 = 16$.

Tutoraufgabe 2

Sei U eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge X von U sei $\overline{X} = U \setminus X$ das sogenannte Komplement von X bezüglich U.

1. Geben Sie ein Beispiel für $A, B \subseteq U$ an, so dass die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nicht gilt. Für welche Mengen A, B gilt die Gleichung?

   Um die DeMorgansche Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für beliebige Mengen A und B nachzuweisen, reicht es, die Gleichung im Venn-Diagramm der Vorbereitungsaufgabe 2.2 zu verifizieren. Begründung!

2. Um die allgemeine Gültigkeit von Mengengleichungen in 3 Variablen A, B, C zu beweisen oder zu widerlegen, reicht es, dies in einem Venn-Diagramm für die Mengen $A = \{a, ab, ac, abc\}$, $B = \{b, ab, bc, abc\}$, $C = \{c, bc, ac, abc\}$ über dem Universum $U = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc, d\}$ zu tun.

   Widerlegen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$!
   Beweisen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$!

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A_i \subseteq U$ für alle $i \in [n]$. Zeigen Sie für $n = 3$ die Gleichung

   $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\,.$$

   Wie kann man den Beweis dieser Gleichung für $n = 4$ zurückführen auf den Beweis der Gleichung für $n = 3$? Wie kann man diesen Schritt verallgemeinern?

Lösung

1. Nicht allgemein gültige Mengengleichungen in 2 Variablen A und B kann man stets mit dem Venn-Diagramm der Vorbereitung 2 widerlegen. Es geht u. U. aber einfacher wie folgt.

   Sei $U = \{a\}$. Wir setzen $A = U$ und $B = \emptyset$. Dann gilt einerseits $\overline{A \cup B} = \overline{U \cup \emptyset} = \overline{U} = \emptyset$. Andererseits gilt $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{U} \cup \overline{\emptyset} = \emptyset \cup U = U$. Offenbar gilt aber $U \neq \emptyset$, mithin $\overline{A \cup B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Die betrachtete Gleichung gilt genau dann, wenn $A = B$ gilt.

   Dies folgt übrigens aus
   $$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,,$$
   d. h. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, was gleichbedeutend ist mit $\overline{A} = \overline{B}$, d. h. $A = B$.

   Im Venn-Diagramm für $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und $U = \{1, 2, 3, 4\}$ verifizieren wir $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ wie folgt.

   $$\begin{array}{lclclcl} \overline{A \cup B} & = & \overline{\{1,2\} \cup \{2,3\}} & = & \overline{\{1,2,3\}} & = & \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} \; = \{4\}\,, \\ \overline{A} \cap \overline{B} & = & \overline{\{1,2\}} \cap \overline{\{2,3\}} & = \{3,4\} \cap \{1,4\} & = & \{4\}\,. \end{array}$$

   Warum reicht diese Verifikation hin zum Beweis des Gesetzes von DeMorgan?

   Begründung: Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 repräsentieren die disjunkten Mengen $D_1 = A \cap B$, $D_2 = \overline{A} \cap B$, $D_3 = A \cap \overline{B}$ und $D_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$. Mit disjunkten Mengen aber lassen sich die obigen Rechnungen analog durchführen, wenn man eine Zusammenfassung von Elementen n_1, n_2 ... als Vereinigung von Mengen D_{n_1}, D_{n_2}, ... übersetzt.

2. Widerlegung der Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ mit obigem Venn-Diagramm:

$$\begin{array}{rcl} A \setminus (B \cup C) & = & \{a, ab, ac, abc\} \setminus (\{b, ab, bc, abc\} \cup \{c, bc, ac, abc\}) \\ & = & \{a, ab, ac, abc\} \setminus \{b, c, ab, bc, ac, abc\} \\ & = & \{a\} \\ & \neq & \\ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) & = & (\{a, ab, ac, abc\} \setminus \{b, ab, bc, abc\}) \\ & & \quad \cup (\{a, ab, ac, abc\} \setminus \{c, bc, ac, abc\}) \\ & = & \{a, ac\} \cup \{a, ab\} \\ & = & \{a, ac, ab\}\,. \end{array}$$

Beweis der Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ entsprechend der Behauptung in der Aufgabenstellung, d. h. durch Verifikation im Venn-Diagramm:

$$\begin{array}{rcl} A \setminus (B \cup C) & = & \{a\} \\ & = & \\ (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & = & \{a, ac\} \cap \{a, ab\} \\ & = & \{a\}\,. \end{array}$$

3. Sei $n = 3$. Dann folgt mit Hilfe zweimaliger Anwendung von Teilaufgabe 1

$$\begin{array}{rcl} \overline{\bigcup_{i=1}^{3} A_i} & = & \overline{(A_1 \cup A_2) \cup A_3} \\ & = & \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \overline{A_3} \\ & = & (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cap \overline{A_3} \\ & = & \bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\,. \end{array}$$

Sei $n = 4$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcl} \overline{\bigcup_{i=1}^{4} A_i} & = & \overline{(\bigcup_{i=1}^{3} A_i) \cup A_4} \\ & = & \overline{\bigcup_{i=1}^{3} A_i} \cap \overline{A_4} \\ & = & \bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i} \cap \overline{A_4} \\ & = & \bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\,. \end{array}$$

Allgemein kann man den Beweis für n auf den Beweis für $n-1$ zurückführen. Tatsächlich folgt nun, dass die Gleichung für beliebiges n gilt. Das zugrunde liegende Beweisprinzip werden wir später als Prinzip der vollständigen Induktion kennenlernen.

Tutoraufgabe 3

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,

2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv,
3. die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch,
4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1.

Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung!
In welcher Weise wird das Urbild von R_3 partitioniert?

Lösung

1. Sei
$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$
R_1 ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. R_1 ist nicht transitiv, weil zwar $(1,2) \in R_1$ und $(2,3) \in R_1$, aber $(1,3) \notin R_1$.

2. Sei
$$R_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$
R_2 ist asymmetrisch. R_2 ist nicht transitiv, weil zwar $(1,2) \in R_2$ und $(2,3) \in R_2$, aber $(1,3) \notin R_2$.

3. Wir müssen uns nun davon überzeugen, dass die transitive Hülle von R_2 symmetrisch ist.

   Bei der Bildung der transitiven Hülle einer Relation bedienen wir uns eines Begriffes, den wir später in der Graphentheorie kennenlernen werden, und sagen, dass man ein Element y von x aus über einen "Weg innerhalb R erreichen" kann, falls es Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt mit der Eigenschaft
$$x = a_0 R a_1 R \ldots R a_n = y\,,$$
   was gleichbedeutend ist mit der Definition der Vorlesung $(x,y) \in R^n$. Ein "Weg" ist dabei eine Folge von Elementen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, so dass je zwei benachbarte Elemente der Folge in Relation R sind.

   Die Bildung der transitiven Hülle R^+ einer Relation R kann nun durch Hinzunahme genau aller derjenigen Paare (x,y) geschehen, so dass y von x aus über irgendeinen Weg innerhalb R erreichbar ist.

   Für die transitive Hülle ${R_2}^+$ von R_2 gilt
$${R_2}^+ = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}\,.$$
   Beispielsweise folgen
   $(1,3) \in {R_2}^+$ mit dem Weg $1,2,3$ wegen $(1,2) \in R_2$, $(2,3) \in R_2$, und
   $(2,1) \in {R_2}^+$ mit dem Weg $2,3,1$ wegen $(2,3) \in R_2$, $(3,1) \in R_2$.

   Offenbar ist ${R_2}^+$ symmetrisch, weil alle überhaupt möglichen Paare in ${R_2}^+$ enthalten sind. Es gilt ${R_2}^+ = \{1,2,3\}^2$.

4. Mit der schon erwähnten Methode der Hinzunahme von Paaren (x, y) von Elementen x, y, die über einen Weg innerhalb R_1 verbunden werden können, erhalten wir

   $$R_3 = {R_1}^+ = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}\,.$$

   Zu zeigen ist lediglich $(1, 3) \in {R_1}^+$ und $(3, 1) \in {R_1}^+$ wie folgt:
   $(1, 3) \in {R_1}^+$ mit dem Weg $1, 2, 3$ wegen $(1, 2) \in R_1$, $(2, 3) \in R_1$, und
   $(3, 1) \in {R_1}^+$ mit dem Weg $3, 2, 1$ wegen $(3, 2) \in R_1$, $(2, 1) \in R_1$.

R_3 ist eine Äquivalenzrelation, weil sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Reflexivität bzw. Symmetrie von $R_3 = {R_1}^+$ folgt aus der Reflexivität bzw. Symmetrie von R_1. R_3 ist per Konstruktion transitiv. Das Urbild von R_3 ist $\{1, 2, 3\}$. Es wird durch eine einzige Äquivalenzklasse partitioniert.