Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Lösungsblatt 14
17. Februar 2010

Diskrete Strukturen

Mit Blatt 14 können Sie Zusatzpunkte erwerben.
Berechnungsbasis für Bonuspunkte sind Blatt 1 bis 13.

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Eine Tour in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg $v_0, v_1, \ldots, v_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit paarweise verschiedenen Kanten $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ aus E für alle $i \in [n]$. Die Tour heißt geschlossen, falls $v_0 = v_n$ und $n \geq 3$ gilt.
Wir nehmen an, dass G zusammenhängend ist und mindestens 3 Knoten enthält und dass alle Knoten in G den Grad 2 oder 4 besitzen.

1. Zeigen Sie, dass jede nicht geschlossene Tour $v_0, v_1, \ldots, v_n$ zu einer Tour $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ in G verlängert werden kann.

2. Zeigen Sie, dass jeder Knoten v stets Element eines Kreises in G ist.

Lösung

1. Sei $t = v_0, v_1, \ldots v_n$ eine nicht geschlossene Tour.

   Falls $n = 1$ oder $n = 2$ gilt, dann folgt auch $v_0 \neq v_n$, weil die e_i paarweise verschieden sind und keine Schleifen existieren.

   Seien $n \in \mathbb{N}$ und $v_0 \neq v_n$.

   Wir zeigen, dass v_n stets in einer ungeraden Anzahl von Kanten e_i von t enthalten ist. Da der Grad von v_n gerade ist, muss es dann eine Kante $e_{n+1} = \{v_n, v_{n+1}\}$ geben, die mit v_n inzidiert und nicht schon in t enthalten ist.

   Wir zeigen wie folgt, dass v_n stets in einer ungeraden Anzahl von Kanten e_i von t enthalten ist.

   Dazu betrachten wir die Menge $T = \{i \mid i \neq n,\ v_i = v_n\}$.

   Wegen $0, n \notin T$ ist für jedes $i \in T$ die Menge $\{e_i, e_{i+1}\}$ wohldefiniert. Damit ist die Menge $E(T)$ aller Kanten der Tour t, die mit v_n inzidieren, gegeben durch

   $$E(T) = \{e_n\} \cup \left(\bigcup_{i \in T} \{e_i, e_{i+1}\} \right) .$$

   Für alle $i, j \in T$ mit $i \neq j$ gilt $2 < |i - j|$. Daraus folgt für alle $i, j \in T$ mit $i \neq j$ die Disjunktheit $\{e_i, e_{i+1}\} \cap \{e_j, e_{j+1}\} = \emptyset$.

   Mithin folgt, dass $|E(T)|$ ungerade ist.

2. Zu jedem Knoten u gibt es eine Kante $e = \{u, v\}$. Daraus folgt, dass jeder Knoten in einer Tour enthalten ist.

   Da jede Tour zu einer geschlossenen Tour verlängert werden kann, folgt, dass jeder Knoten in einer geschlossenen Tour $t = v_0, v_1, \ldots, v_n$ enthalten ist.

   Sei i der kleinste Index $\neq 0$, so dass $v_i = v_0$. Es gilt $3 \leq i \leq n$ und der Weg $v_0, v_1, \ldots, v_i$ definiert einen Kreis.

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $G = \langle S, \circ, e\rangle$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen $e, a, b, c \in S$, in der speziell für a gilt $a^2 = e$ mit dem neutralen Element e.

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.

2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.

3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.

   Zeigen Sie, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.

Lösung

1. Wir geben zunächst jenen Teil der Verknüpfungstafel an, der sich zwingend aus den Voraussetzungen ergibt.

$\circ$	e	a	b	c
0	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c	b		

.

   Für $b \circ b$ muss dann zwingend entweder $b \circ b = e$ oder $b \circ b = a$ gelten.

   Fall 1, $b \circ b = e$: Es folgt dann

$\circ$	e	a	b	c
0	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

   Fall 2, $b \circ b = a$: Es folgt dann

$\circ$	e	a	b	c
0	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

.

   Bemerkung: Man beachte, dass die obige Herleitung der Verknüpfungstafeln noch nicht die Gruppeneigenschaften der Verknüpfungen beweist. Setzt man aber voraus, dass es 2 Gruppen der obigen Form gibt, dann gehören die hergeleiteten Tafeln tatsächlich zu den beiden gesuchten Gruppen.

Allerdings sieht man, dass die Tafel im Fall 1 bis auf Umbezeichnung identisch ist mit der additiven Gruppentafel aus TA 3.2, Blatt 13. Die Tafel im Fall 2 ist bis auf Umbezeichnung identisch mit der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$. In beiden Fällen erhält man durch diesen Hinweis den Beweis der Gruppeneigenschaften.

2. Die Herleitung der beiden Verknüpfungstafeln in (1.) schließt weitere Tafeln aus.

3. Die Ordnung der Elemente einer Gruppe ist stets Teiler der Gruppenordnung, d. h. hier Teiler von 4. Da nur das neutrale Element die Ordnung 1 besitzt, müssen a, b, c die Ordnung 2 oder 4 haben.

   Sei $x \in \{a, b, c\}$. Falls x die Ordnung 4 besitzt, d. h. $x^4 = e$, dann hat x^2 die Ordnung 2. Es gilt also, dass x oder x^2 die Ordnung 2 besitzen.

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Die Menge M aller Abbildungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in $\mathbb{R}$ bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen bekanntlich ein Monoid $\langle M, \circ \rangle$.
Wir betrachten die Teilmenge S aller speziellen Abbildungen $F_{a,b}(x)$ aus M, die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert sind durch die Gleichung

$$F_{a,b}(x) = a \cdot x + b\,.$$

1. Bestimmen Sie für alle $F_{a,b}$ und $F_{c,d}$ die reellen Zahlen e, f, so dass gilt

   $$F_{e,f} = F_{a,b} \circ F_{c,d}\,.$$

   Begründen Sie, warum $\langle S, \circ \rangle$ eine Unteralgebra von $\langle M, \circ \rangle$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ ein Monoid ist.

3. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe ist.
   Ist $\langle S, \circ \rangle$ kommutativ?

Lösung

1. Es gilt
   $$\begin{aligned} F_{e,f}(x) &= F_{a,b}(F_{c,d}(x)) \\ &= a \cdot (c \cdot x + d) + b \\ &= a \cdot c \cdot x + a \cdot d + b\,. \end{aligned}$$
   Es folgt: $e = a \cdot c$, $f = a \cdot d + b$.

   Es gilt $F_{e,f} \in S$ genau dann, wenn $e \neq 0$.
   Wegen $a \neq 0$ und $c \neq 0$ folgt $e = a \cdot c \neq 0$, mithin $F_{e,f} \in S$.

2. Jede Unteralgebra eines Monoids $\langle M, \circ \rangle$ ist selbst eine Halbgruppe. Wir haben also nur zu prüfen, ob $\langle S, \circ \rangle$ ein neutrales Element enthält.

   Es gilt $F_{1,0}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. D. h. $F_{1,0}$ ist gleich der Identität in $\langle M, \circ \rangle$ und damit ein neutrales Element.

   Wegen $1 \neq 0$ folgt auch $F_{1,0} \in S$.

   Damit ist $\langle S, \circ \rangle$ ein Monoid.

3. Für alle $F_{a,b} \in S$ suchen wir $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, so dass gilt
   $$F_{a,b} \circ F_{c,d} = F_{1,0}\,.$$
   Best.-Gleichungen: $1 = a{\cdot}c\,,\qquad 0 = a{\cdot}d + b\,.$
   Lösung: $c = \frac{1}{a}\,,\qquad d = -\frac{b}{a}\,.$
   $\langle S, \circ\rangle$ ist nicht kommutativ!

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

(Aus Klausur 2007)
Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als natürliche Zahl in Dezimaldarstellung an oder als Zahlausdruck. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort möglichst knapp.

1. Wie viele perfekte Matchings besitzt der $K_{3,3}$?
2. Betrachten Sie die Kongruenzrelation $\equiv_{13}$ auf $\mathbb{Z}$.
   Sei A die Kongruenzklasse modulo 13, die die Zahl -100 enthält.
   Wie viele Elemente $x \in A$ gibt es mit $0 \leq x \leq 100$?
3. Geben Sie die Ordnung des Elementes 8 der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{20}, +_{20}\rangle$ an.

Lösung

1. Es gibt genau 6 perfekte Matchings.

   Wir notieren die 6 Knoten mit $1_a, 2_a, 3_a$ bzw. $1_b, 2_b, 3_b$. Wird 1_a mit 1_b gematcht, dann gibt es genau 2 Möglichkeiten, die restlichen Knoten zum perfekten Matching zu ergänzen. Entsprechendes gilt, wenn 1_a mit 2_b bzw. 1_a mit 3_b gematcht wir.
2. $(-100) \bmod 13 = 4$. Des Weiteren gilt $4 + 7 \cdot 13 = 95$. Also liegen 8 Werte von x zwischen 0 und 100.
3. Die Ordnung von 8 in $\langle \mathbb{Z}_{20}, +_{20}\rangle$ ist 5.

   $5 \cdot 8 = 40$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 20.

Hausaufgabe 5 (3 Punkte)

(Aus Klausur 2007)
Sei $\pi(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Wir betrachten den endlichen Ring $R = \langle\, \mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)}\,\rangle$.
Sei E die Menge aller Elemente von $\mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}$, die ein inverses Element bezüglich der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$ besitzen.

1. Zeigen Sie, dass $E' = E \cup \{0\}$ abgeschlossen ist unter der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$, d. h. $p, q \in E' \Rightarrow p \cdot_{\pi(x)} q \in E'$.
2. Bestimmen Sie E! (Es wird eine Begründung verlangt!)

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die Nullteiler von R vorab zu bestimmen.
3. Zeigen Sie, dass E' nicht abgeschlossen ist unter der Addition $+_{\pi(x)}$, d. h. keinen Unterring von R bildet!

Lösung

Zunächst gilt $\mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)} = \{0, 1, 2, x, 2x, x+1, x+2, 2x+1, 2x+2\}$.

1. Seien $p, q \in E'$.
   Falls p oder q gleich Null 0 ist, dann gilt $p \cdot_{\pi(x)} q = 0$, also $p \cdot_{\pi(x)} q \in E'$.

   Andernfalls besitzen p und q je ein inverses Element p^{-1} bzw. q^{-1}.
   Dann ist $s = q^{-1} \cdot_{\pi(x)} p^{-1}$ ein inverses Element von $p \cdot_{\pi(x)} q$. Beweis:

   $$(p \cdot_{\pi(x)} q) \cdot_{\pi(x)} s = p \cdot_{\pi(x)} q \cdot_{\pi(x)} q^{-1} \cdot_{\pi(x)} p^{-1} = p \cdot_{\pi(x)} 1 \cdot_{\pi(x)} p^{-1} = 1\,.$$

2. Für die Menge der Elemente, zu denen ein Inverses existiert, gilt

   $$E = \{1, 2, x, 2x\}\,.$$

   Dies geht zum Einen hervor aus

   $$\begin{aligned} x \cdot_{\pi(x)} x &\equiv_{\pi(x)} x^2 \\ &\equiv_{\pi(x)} x^2 - (x^2 + 2) \\ &\equiv_{\pi(x)} 1\,. \end{aligned}$$

   Andererseits besteht die folgende Menge N aus Nullteilern,

   $$N = \{x+1, x+2, 2x+1, 2x+2\}\,.$$

   Dies folgt aus $(x+1) \cdot_{\pi(x)} (x+2) \equiv_{\pi(x)} x^2 + 2$.

3. Es gilt $x, 1 \in E$, aber $x + 1 \notin E$, da $x + 1$ ein Nullteiler ist.