
Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele verschiedene Tupel (A_1, A_2) mit disjunkten und nicht leeren $A_1, A_2 \subseteq [n]$ gibt es? Begründung!
2. Wie viele Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^5$ der folgenden Gleichung gibt es:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19.$$

Lösung

1. Sei anz die gesuchte Anzahl von Tupel.

Wir setzen $A_3 = [n] \setminus (A_1 \cup A_2)$ und betrachten alle Abbildungen $f : [n] \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Wir setzen $A_i = f^{-1}(i)$. Dann entsprechen die Tupel (A_1, A_2) wegen $A_3 = [n] \setminus (A_1 \cup A_2)$ eineindeutig den Abbildungen $f : [n] \rightarrow \{1, 2, 3\}$, von denen es genau 3^n viele gibt.

Nun berücksichtigen wir, dass A_1 und A_2 nicht leer sein dürfen.

Es gibt genau 2^n verschiedene f mit $f([n]) \subseteq \{2, 3\}$ und es gibt entsprechend genau 2^n verschiedene f mit $f([n]) \subseteq \{1, 3\}$. Außerdem gibt es genau eine Abbildung f mit $f([n]) \subseteq \{3\}$. Nach dem Inklusions/Exklusionsprinzip folgt

$$anz = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

2. Gesucht ist die Anzahl anz geordneter Zahlpartitionen von 19, die gewissen Einschränkungen genügen.

Wir transformieren das Problem so, dass das transformierte Problem der Standardaufgabe der Bestimmung von k -elementigen Multiteilmengen nahekommt.

Sei $y_i = 5 - x_i$. Dann gilt

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \sum_{i=1}^5 x_i = 19 \iff y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \sum_{i=1}^5 y_i = 6.$$

Da offenbar $y_i \leq 6$ gelten muss, gilt

$$y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \sum_{i=1}^5 y_i = 6 \iff y_i \geq 0, y_i \neq 6 \text{ und } \sum_{i=1}^5 y_i = 6.$$

Wir bestimmen die Anzahl anz_0 der Lösungen $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ mit $\sum_{i=1}^5 y_i = 6$ und ziehen davon diejenigen Lösungen ab, für die $y_i = 6$ gilt für ein $i \in [5]$.

Wir fassen die 5 verschiedenen Variablen y_i zu einer Menge zusammen und wählen eine Variable so oft aus, wie es ihrem Wert entspricht. Es müssen 6 Mal Variablen ausgewählt werden. Die gesuchte Anzahl anz_0 von Lösungen ist also gleich der Anzahl von 6-elementigen Multiteilmengen aus einer 5-elementigen Menge. Nach Formel gilt also mit $n = 5$ und $k = 6$

$$anz_0 = \binom{k+n-1}{k} = \binom{6+5-1}{6} = \binom{10}{6} = 210.$$

Es folgt

$$anz = 210 - 5 = 205.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in 5 nicht unterscheidbare Pakete 15 gleiche Äpfel zu verteilen, wenn in jedem Paket mindestens 1 Apfel enthalten sein soll?

Lösung

1. Sei anz die gesuchte Anzahl. Wir müssen den Fall zulassen, dass ein oder mehrere Schachteln leer bleiben. Wir benützen die Bezeichnung $P_{n,k}$ für die Anzahl ungeordneter k -Zahlpartitionen der Zahl n . Nach dem Modell der beliebigen Verteilung von $n = 4$ gleichen Bällen auf $m = 3$ nicht unterscheidbare Urnen gilt

$$anz = \sum_{k=1}^m P_{n,k} = P_{4,1} + P_{4,2} + P_{4,3}.$$

Elementares Auszählen ergibt $P_{4,3} = 1$, $P_{4,2} = 2$ und $P_{4,1} = 1$. Dann haben wir

$$anz = 4.$$

2. Sei anz die gesuchte Anzahl. Nach dem Modell der surjektiven Verteilung von $n = 15$ gleichen Bällen auf $m = 5$ nicht unterscheidbare Urnen gilt

$$\begin{aligned} anz &= P_{n,m} = P_{15,5} \\ &= \sum_{j=1}^k P_{10,j} = P_{10,1} + P_{10,2} + P_{10,3} + P_{10,4} + P_{10,5} \\ &= (1 + 5) + P_{10,3} + P_{10,4} + P_{10,5} \\ &= (1 + 5) + (P_{7,1} + P_{7,2} + P_{7,3}) + P_{10,4} + P_{10,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + 5) + (1 + 3 + P_{4,1} + P_{4,2} + P_{4,3}) + P_{10,4} + P_{10,5} \\
&= (1 + 5) + (1 + 3 + 1 + 2 + 1) + P_{10,4} + P_{10,5} \\
&= (1 + 5) + (1 + 3 + 1 + 2 + 1) + (P_{6,1} + P_{6,2} + P_{6,3} + P_{6,4}) + P_{10,5} \\
&= (1 + 5) + (1 + 3 + 1 + 2 + 1) + (1 + 3 + P_{6,3} + 2) + P_{10,5} \\
&= (1 + 5) + (1 + 3 + 1 + 2 + 1) + (1 + 3 + (P_{3,1} + P_{3,2} + P_{3,3}) + 2) + P_{10,5} \\
&= (1 + 5) + (1 + 3 + 1 + 2 + 1) + (1 + 3 + (1 + 1 + 1) + 2) + P_{10,5} \\
&= 23 + P_{10,5} \\
&= 23 + (P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4} + P_{5,5}) \\
&= 23 + (1 + 2 + 2 + 1 + 1) \\
&= 30.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist.
2. Zeigen Sie nun durch vollständige Induktion, dass die 2^n -te Zeile des Pascalschen Dreiecks für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur aus ungeraden Zahlen besteht.

Lösung

1. Es gilt

$$\binom{2n}{2k} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}.$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}
(2n)! &= 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= [2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 2] \cdot [(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1] \\
&= 2^n \cdot n! \cdot U_n,
\end{aligned}$$

wobei $U_n = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ offenbar eine ungerade Zahl ist.

Wir erhalten

$$\binom{2n}{2k} = \frac{2^n \cdot n! \cdot U_n}{(2^k \cdot k! \cdot U_k) \cdot (2^{n-k} \cdot (n-k)! \cdot U_{n-k})} = \binom{n}{k} \frac{U_n}{U_k \cdot U_{n-k}}.$$

Falls nun $\binom{2n}{2k}$ gerade ist, dann muss $\binom{n}{k}$ ebenfalls gerade sein, weil $\frac{U_n}{U_k \cdot U_{n-k}}$ ein Bruch aus ungeraden Zahl ist. Die Umkehrung folgt aus dem gleichen Grund. Daraus folgt die gewünschte Aussage.

2. Mit dem bisher bewiesenen Teil zeigen wir nun durch Induktion, dass die 2^n -te Zeile des Pascal'schen Dreiecks für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur aus ungeraden Zahlen besteht (und es deshalb unendlich viele Zeilen gibt, deren Einträge alle ungerade sind).

Die I.V. ist klar, denn die 2^0 -te Zeile enthält nur den Eintrag $\binom{0}{0} = 1$. Angenommen, die Behauptung sei wahr für die 2^{n-1} -te Zeile des Pascalschen Dreiecks. Die 2^n -te Zeile ist gegeben durch

$$\binom{2^n - 1}{0} \quad \binom{2^n - 1}{1} \quad \binom{2^n - 1}{2} \quad \cdots \quad \binom{2^n - 1}{2^n - 1}.$$

Betrachte nun den Binomialkoeffizienten $\binom{2^n - 1}{i}$ für $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Ist i ungerade, so wissen wir wegen

$$\binom{2^n - 1}{i} = \frac{2^n - 1}{i} \binom{2^n - 2}{i - 1}$$

bereits, dass der entsprechende Eintrag ungerade ist, denn $\binom{2^n - 2}{i - 1} = \binom{2 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 \cdot \frac{i-1}{2}}$ ist nach der I.A. in Verbindung mit $\binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$ ungerade; ferner ist $2^n - 1$ (trivialerweise) ungerade. Hiermit ergibt sich für gerade i aufgrund von

$$\binom{2^n - 1}{i} = \binom{2^n - 1}{2^n - 1 - i}$$

in Verbindung mit der Tatsache, dass $2^n - 1 - i$ ungerade ist, dass auch $\binom{2^n - 1}{i}$ ungerade sein muss.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Stirling-Zahlen zweiter Art.

$$S_{n+1, k+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i, k}.$$

Lösung

$S_{n+1, k+1}$ ist gleich der Anzahl der Partitionen von $[n+1]$ in $k+1$ Klassen.

Jede Partition P von $[n+1]$ enthält eine Klasse $K_P(n+1)$, die $n+1$ enthält. Alle übrigen k Klassen von P partitionieren dann für $i = |K_P(n+1)| - 1$ die $(n-i)$ -elementige Teilmenge $[n+1] \setminus K_P(n+1)$ von $[n]$ in k Klassen.

Es gibt $\binom{n}{i}$ Klassen K von Partitionen von $[n+1]$ mit $n+1 \in K$ und $|K| = i+1$. Zu jeder dieser Klassen gibt es nun $S_{n-i, k}$ Partitionen von $[n] \setminus K$ mit k Klassen. Insgesamt erhalten wir

$$S_{n+1, k+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{n-i, k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} S_{n-i, k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i, k}.$$

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_1, a_2, \dots, a_{|M|})$ ein $|M|$ -Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$. Dann nennen wir die Abbildung $\pi_z : M \rightarrow M$ mit $\pi_z(a_i) = a_{(i \bmod |M|)+1}$ einen *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z . Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π . Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
Welche verschiedenen Darstellungen hat π_z^3 ? Ist π_z^4 ein Zyklus?

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind. Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zykluspartition*. Dabei bildet die Menge der Basismengen $P_Z = \{M(\pi) \mid \pi \in Z\}$ eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen $M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)$. Wir sagen, dass Z eine Zykluspartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?
Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!
Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zykluspartition von $[5]$?

Sei Z eine Zykluspartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \rightarrow [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls } i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z.$$

3. Zykluspartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.
Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zykluspartition.
Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\}$!

Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung* von f , d. h. eine Zykluspartition Z von $[9]$, so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

5. Sei f wie vorhin.

Geben Sie eine Matrixdarstellung von f^2 an!

Geben Sie eine Zyklendarstellung von f^2 an!

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k > 0$, so dass $f^k = id$ gilt, wobei id die identische Abbildung ist!

Lösung

Wir erinnern an die Komposition \circ von binären Relationen und Abbildungen in Kapitel II, Grundlagen; Relationen (Folie 30) der Vorlesung. Für Operationen f über einer Menge M , d.h. $f : M \rightarrow M$, gibt es die Möglichkeit der mehrfachen Hintereinanderausführung der Operation f mit entsprechenden Schreibweisen. Es gilt

$$f^2 = f \circ f, \quad \text{und allgemein} \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N},$$

d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in M : f^{n+1}(x) = f(f^n(x)),$$

insbesondere $f^2(x) = f(f(x))$. Man beachte, dass die Schreibweise der Potenzierung f^n durch Hausaufgabe 1 von Blatt 4 gerechtfertigt wurde.

1. • Antwort: 3.

Begründung: Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$. Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi^2(a_1) = \pi(a_2).$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a)), \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b)), \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c)).$$

- Die Basis von $z = (4, 1, 3, 2)$ ist $M_z = \{1, 2, 3, 4\}$. Für den dargestellten Zyklus $\pi_z : M \rightarrow M$ gilt

$$\pi_z(1) = 3, \quad \pi_z(2) = 4, \quad \pi_z(3) = 2, \quad \pi_z(4) = 1.$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} \pi_z^3(1) &= \pi_z^2(\pi_z(1)) = \pi_z^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4, \\ \pi_z^3(2) &= \pi_z^2(\pi_z(2)) = \pi_z^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3, \\ \pi_z^3(3) &= \pi_z^2(\pi_z(3)) = \pi_z^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1, \\ \pi_z^3(4) &= \pi_z^2(\pi_z(4)) = \pi_z^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2. \end{aligned}$$

π_z^3 ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$z_1 = (1, 4, 2, 3), \quad z_2 = (2, 3, 1, 4), \quad z_3 = (3, 1, 4, 2), \quad z_4 = (4, 2, 3, 1).$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} \pi_z^4(1) &= \pi_z(\pi_z^3(1)) = 1, \\ \pi_z^4(2) &= \pi_z(\pi_z^3(2)) = 2, \\ \pi_z^4(3) &= \pi_z(\pi_z^3(3)) = 3, \\ \pi_z^4(4) &= \pi_z(\pi_z^3(4)) = 4. \end{aligned}$$

π_z^4 ist kein Zyklus, weil $|\{(\pi_z^4)^n(1) \mid n \in \mathbb{N}\}| = 1 \neq 4$. Tatsächlich ist π_z^4 gleich der Identität id .

2. • Für die Basismengen $M(\pi_{z_i})$ gelten die Gleichungen $M(\pi_{z_1}) = \{2, 5\}$, $M(\pi_{z_2}) = \{1\}$ und $M(\pi_{z_3}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Es gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$\pi_{z_1}(2) = 5, \quad \pi_{z_1}(5) = 2.$$

$$\pi_{z_2}(1) = 1.$$

$$\pi_{z_3}(1) = 5, \quad \pi_{z_3}(2) = 1, \quad \pi_{z_3}(3) = 2, \quad \pi_{z_3}(4) = 5, \quad \pi_{z_3}(5) = 4.$$

- Offenbar sind die Zyklen nicht paarweise disjunkt.
Für die Basismengen gilt z. B. $M(\pi_{z_1}) \cap M(\pi_{z_3}) \neq \emptyset$.

3. Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$f_Z(1) = 4, \quad f_Z(2) = 2, \quad f_Z(3) = 3, \quad f_Z(4) = 5, \quad f_Z(5) = 1.$$

4. • Durch Auswertung von $f^i(x)$ erhält man

$$\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\} = \{1, 8, 4, 2\}, \quad (1)$$

$$\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\} = \{6, 9, 3\}, \quad (2)$$

$$\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\} = \{7, 5\}. \quad (3)$$

- Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1 , M_2 bzw. M_3 . Dann definiert f je einen Zyklus f_i auf den Basismengen M_1 , M_2 und M_3 mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1, 8, 4, 2), \quad z_2 = (6, 9, 3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7, 5).$$

Die Zyklenpartition

$$Z = (1, 8, 4, 2) (6, 9, 3) (7, 5)$$

ist eine Zyklendarstellung von f .

5. • Matrixdarstellung f^2 :

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 1 & 5 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Zyklendarstellung von f^2 :

$$f^2 = (1, 4) (2, 8) (3, 9, 6) (5) (7).$$

- Die gesuchte Zahl k ist gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) der Längen der in f enthaltenen Zyklen f_i . Die Längen sind 2, 3 und 4. Damit gilt

$$k = kgV(2, 3, 4) = 12.$$

Vorbereitung 2

Stellen Sie für den Graph

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, h\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{g, h\}\})$$

1. die Inzidenzmatrix und die Adjazenzmatrix auf.
2. Welche Zusammenhangskomponenten hat G ?
3. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G .

Lösung

1. In der Vorlesung wurde eine Inzidenzmatrix ganz allgemein definiert zur Darstellung einer Relation zwischen einer Menge S und einer Menge T .

Im Kontext von (ungerichteten) Graphen betrachtet man die Inzidenzrelation zwischen der Knotenmenge V und der Kantenmenge E . Die entsprechende Inzidenzmatrix der Inzidenzrelation heißt dann Inzidenzmatrix B_G des Graphen G . Man beachte, dass die Inzidenzmatrix bei einfachen Graphen in jeder Spalte genau zweimal die 1 enthält.

Für den Graphen G gilt mit einer den obigen Auflistungen entsprechenden Nummerierung von Knoten 1 bis $|V| = 8$ bzw. Kanten 1 bis $|E| = 8$

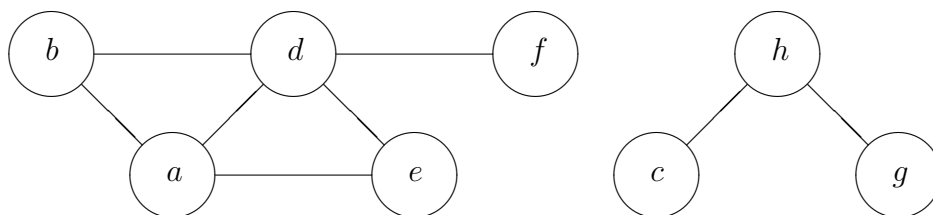
$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Kontext von Graphen betrachtet man die Adjazenzrelation auf der Knotenmenge, die durch das Vorhandensein einer Kante $\{a, b\}$ für Knotenpaare a, b definiert ist. Die Adjazenzrelation wird durch die Adjazenzmatrix A_G des Graphen G dargestellt. Für den Graphen G gilt mit der Nummerierung der Knoten 1 bis $|V| = 8$, die der obigen Auflistung entspricht,

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Die Äquivalenzrelation der Erreichbarkeit auf der Knotenmenge von G besteht aus den Klassen $\{a, b, d, e, f\}$ und $\{c, g, h\}$. Dies entnimmt man unmittelbar aus der nachfolgenden graphischen Darstellung von G .

3.



Vorbereitung 3

Die absteigende Gradfolge eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $d(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

i) 2, 1, 0.

ii) 3, 3, 3, 3, 2, 2.

iii) 3, 3, 3, 2, 2, 2.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.

ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Lösung

1. i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten schon mit beiden anderen Knoten verbunden ist, kann es keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben. Außerdem muß die Summe der Grade gerade sein.

ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}).$$

iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

2. Isomorphie bedeutet „Gleichheit bis auf Umbezeichnung“. Dahinter steht die Idee der Betrachtung von Strukturen auf nicht unterscheidbaren Elementen.

i) Für isomorphe Graphen G_1, G_2 gibt es eine bijektive Zuordnung der Knoten beider Graphen und zwar so, dass die Kantenbeziehungen und damit die Knotengrade erhalten bleiben (Umbezeichnung von Knoten). Somit sind auch die Gradfolgen identisch.

ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht!

Bemerkung: Wenn diese Umkehrung gelten würde, dann hätte man in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren, die Isomorphie von Graphen zu testen. Dieses Problem ist jedoch, wie man zeigen kann, nicht effizient lösbar.

Wir beweisen unsere Aussage durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, indem wir nämlich zwei nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit gleicher Gradfolge 3, 2, 2, 1, 1, 1 angeben. Seien

$$G_1 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}\}),$$

$$G_2 = ([6], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}).$$

Vorbereitung 4

1. Zeigen Sie, dass der Graph C_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ bipartit ist.

Gilt das Gleiche auch für C_{2n+1} ?

2. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Lösung

1. Die Knoten des Graphen $(V, E) = C_{2n}$ lassen sich mit Nummern von 1 bis $2n$ identifizieren, so dass sich eine Kante $\{x, y\}$ als Menge $\{k, k+1\}$ oder $\{2n, 1\}$ darstellen lässt. Für die disjunkte Zerlegung V_1, V_2 von V mit $V_1 = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ und $V_2 = \{2, 4, \dots, 2n\}$ gilt dann für alle Kanten $\{x, y\} \in E$ entweder $x \in V_1 \wedge y \in V_2$ oder $x \in V_2 \wedge y \in V_1$. Mithin ist C_{2n} bipartit.

C_{2n+1} ist nicht bipartit. Beim Durchlauf durch einen Kreis in einer Richtung müssten nämlich die nächsten Knoten jeweils abwechselnd in verschiedenen Mengen sein. Dies ergibt einen Widerspruch.

2. Wir zeigen, dass jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad enthält.

Sei G ein Graph mit n Knoten. Der Grad eines Knotens x kann höchstens $n-1$ sein, denn x kann höchstens mit $n-1$ anderen Knoten verbunden sein. Es gibt also nur n Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$, die als Gradzahlen zur Verfügung stehen. Die Zuordnung eines Grades zu einem Knoten ist eine Abbildung der Knotenmenge in die Menge der Gradzahlen. Falls die Bildmenge dieser Abbildung weniger Zahlen enthält als es Knoten gibt, muß es nach dem Schubfachprinzip zwei Knoten mit dem gleichen Grad geben. Wenn aber n Gradzahlen auftreten, dann muß eine Gradzahl die 0 sein, d. h. es muß einen isolierten Knoten geben. Dann aber kann die Gradzahl $n-1$ nicht mehr vorkommen, weil jeder Knoten nur mehr mit höchstens $n-2$ Knoten verbunden sein kann, im Widerspruch zur Annahme von n Gradzahlen.

Vorbereitung 5

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v .
Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k -reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
Hinweis: Ein Graph heißt k -regulär, wenn alle Knoten den Grad k haben.
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Lösung

1. Falsch! Ein (einfacher) Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = 1$ ist ein Baum (kreisfrei und zusammenhängend) mit Knoten $x \in V$ vom Grad 0. x ist aber kein Blatt, weil dann $\deg(x) = 1$ gelten müßte.

2. Bäume, die nur aus Blättern bestehen, also keine innere Knoten enthalten, besitzen genau 2 Knoten und brauchen wegen $|V| > 2$ nicht betrachtet zu werden.

Außerdem gilt, dass alle Knoten v von T einen Grad ungleich 0 besitzen.

Daraus folgt, dass T einen inneren Knoten v (d. h. einen Knoten v , der kein Blatt ist) besitzt, der mindestens den Grad 3 hat. Durch Entfernen der Blätter von T konstruieren wir nun den Baum T' .

T' ist nicht leer, weil $v \in T'$ gilt.

Falls T' nur einen einzigen Knoten besitzt, dann muß dieser Knoten in T mindestens den Grad 3 haben, also mindestens 3 Blätter tragen, womit in diesem Fall der Beweis erbracht ist.

Anderfalls aber gibt es in T' mindestens ein Blatt. Wählen wir nun in T' ein beliebiges Blatt v_0 aus, dann ist v_0 in T ein innerer Knoten mit Grad ungleich 0 oder 1 und hat wegen $\deg(v) \neq 2$ den Grad $\deg(v_0) \geq 3$. Da v_0 in T' ein Blatt ist (also in T' den Grad 1 hat), muss es zwei Blätter u_1, u_2 in T geben, die zu v_0 benachbart sind.

3. Für bipartite Graphen $G = (V, E)$ haben wir in der Vorlesung eine Zerlegung eingeführt. Danach schreiben wir $G = (A, B, E)$, wobei $A \cup B = V$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt und weder innerhalb A noch innerhalb B Kanten aus E verlaufen können. Alle Kanten verbinden stets Elemente aus A mit Elementen aus B .

Wir bauen, ausgehend von einem Baum $G = (V, E)$, induktiv zwei derartige Knotenmengen A und B auf, so dass alle Kanten nicht innerhalb von A und nicht innerhalb von B verlaufen.

Wir wählen einen beliebigen Startknoten s und setzen $\{s\} = A$, sowie $B = \emptyset$. Alle Nachfolger von s werden in die Menge B aufgenommen. Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist offenbar bipartit.

Falls es einen Knoten $x \in B$ gibt, der einen Nachbarn hat, der noch nicht in $A \cup B$ enthalten ist, wird x ausgewählt und sämtliche Nachbarn von x werden in A aufgenommen. Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist wiederum bipartit.

Der letzte Schritt wird mit jeweils vertauschten Rollen von A und B wiederholt bis alle Knoten entweder in A oder in B enthalten sind.

4. Widerspruchsbeweis: Ein kreisfreier Graph ist ein Wald, d. h. ein Baum oder eine disjunkte und nicht zusammenhängende Summe von Bäumen. Jeder Baum enthält einen Knoten vom Grad 0 oder 1. Der Graph kann also nicht k -regulär sein für $k \geq 2$, denn das würde $k = 0$ und $k = 1$ ausschließen.

5. Da G zusammenhängend ist, gibt es nach Vorlesung einen zugehörigen Spannbaum. Wir behaupten, dass nach Entfernung eines Blattes w (einschließlich seiner in G inzidenten Kanten) eines solchen Baums der resultierende Teilgraph zusammenhängend ist.

Wir entfernen ein Blatt w eines Spannbaums mit all seinen inzidenten Kanten aus dem Graphen. Da w ein Blatt eines Spannbaums des (zusammenhängenden) Graphen ist, bedeutet dies, dass nur eine einzige Kante des Spannbaums entfernt wird.

Alle übrigen mit w inzidenten Kanten können nicht ebenfalls Kanten des gleichen Spannbaums sein. In dem restlichen Spannbaum bleiben also alle Knoten bis auf w erreichbar.

Vorbereitung 6

1. Gegeben seien die Bäume

$$B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\}),$$

$$B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\}).$$

Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

$$\text{i) } 6\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7, \quad \text{ii) } 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1, \quad \text{iii) } 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.$$

Lösung

1. Den Prüfer-Code von Bäumen B_1, B_2 erhält man, indem man, ausgehend von einer lückenlosen und eindeutigen Knotennummerierung von 1 ab, stets das Blatt mit der kleinsten Knotennummer bestimmt und denjenigen Knoten notiert, an dem das Blatt hängt. Anschließend wird das Blatt aus dem Baum gestrichen und der Schritt so lange wiederholt bis nur noch 2 Knoten übrig sind.

Für B_1 erhalten wir den Prüfer-Code 9 9 7 6 7 9 3.

Für B_2 erhalten wir den Prüfer-Code 1 3 4 4 1 7 3.

Bemerkung: Falls der Baum mehr als 9 Knoten hat, dann sollte man die Knotennummern im Code klammern.

2. Die Anzahl der Knoten des dargestellten Baumes ist um 2 größer als die Länge l des Codes. Die Knotennummern sind also $[l + 2]$.

Diejenigen Knotennummern, die im Code nicht vorkommen, bilden die Blätter des Baumes. Zur Rekonstruktion des Baumes nimmt man dasjenige Blatt mit der kleinsten Nummer und verbindet es mit dem Knoten, dessen Knotennummer im Code als Erste steht. Man streicht dann die verarbeitete Blattnummer aus der Liste der noch nicht verarbeiteten Blätter. Nun wiederholt man den Schritt mit dem noch nicht verarbeiteten Abschnitt des Codes (erstes Element wird gestrichen), so lange bis alle Codeziffern verarbeitet sind. Die beiden Knoten in der verbliebenen Liste der noch nicht verarbeiteten Blätter verbindet man. Wir erhalten

$$B_i = ([10], \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{8, 7\}, \{9, 7\}, \{10, 7\}\}),$$

$$B_{ii} = ([9], \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}\}),$$

$$B_{iii} = ([9], \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 7\}, \{7, 9\}, \{9, 8\}, \{8, 6\}, \{6, 4\}, \{4, 2\}\}).$$

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Permutationen einer n -elementigen Menge mit k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$s_{0,0} = 1, \quad s_{n,n} = 1. \quad s_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad s_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0.$$

2. Beweisen Sie mithilfe eines kombinatorischen Arguments, dass gilt:

$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1).$$

Lösung

1. $s_{0,0}$: Für $n = 0$ ist eine n -elementige Menge leer. Die leere Abbildung oder Permutation ist eine, und mithin die einzige Abbildung der leeren Menge. Sie hat natürlich $k = 0$ Zyklen.
 $s_{n,n}$: Eine Permutation, die ebenso viele Zyklen besitzt, wie die zu abzubildende Menge Elemente besitzt, besteht aus einelementigen Zyklen. Sie ist eindeutig bestimmt.
 $s_{n,k}$: Falls $k > n$, dann ist also die Anzahl der Zyklen grösser als die Anzahl der Elemente der abzubildenden Menge. Da die Zyklen disjunkt sind, muss mindestens einer der Zyklen dann leer sein, was aber der Definition von Zyklen einer Permutation widerspricht.
 $s_{n,0}$: Da die Vereinigung der Definitionsbereiche der Zyklen die abzubildende, nicht-leere Menge überdecken muss, muss mindestens ein nicht leerer Zyklus existieren. Daraus folgt aber $k > 0$.
2. Aus der Definition der Stirlingzahlen $s_{n,k}$ ergibt sich hier $n \geq 2$. Es gilt insbesondere $s_{2,0} = 0$ in Übereinstimmung mit der rechten Seite der Gleichung für $n = 2$.

Die Menge der Permutationen von $[n]$ lässt sich als Vereinigung zweier disjunkter Mengen darstellen.

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen:
Wir gehen von den Partitionen von $[n]$ aus, die $n-4$ ein-elementige und zwei 2-elementige Klassen enthalten. Die Anzahl dieser Partitionen ist $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$. Da die Anzahl von Zyklen einer 1- oder 2-elementigen Menge gleich 1 ist, haben wir mit der Anzahl der Partitionen auch die Anzahl der Permutationen erhalten.
- Permutationen mit $n-3$ ein-elementigen Zyklen und einem 3-elementigen Zyklus:
Die Anzahl der Partitionen mit $n-3$ ein-elementigen und einer 3-elementigen Klasse ist gleich $\binom{n}{3}$. Nun aber kann die 3-elementige Klasse noch in 2-facher Weise zyklisch angeordnet werden. Also gibt es $2 \cdot \binom{n}{3}$ Permutationen mit dieser Eigenschaft.

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
 s_{n,n-2} &= 2 \cdot \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \\
 &= \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\
 &= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(8+3(n-3)) \\
 &= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-1).
 \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

1. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_1$, $U_1 \neq V_2$ gilt.

Zeigen Sie, dass G zwei verschiedene Komponenten besitzt.

2. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$. Beweis!

Lösung

1. Wir zeigen, dass es Knoten x und y gibt, die nicht zusammenhängen.

Aus $U_1 \neq V_1$ und $U_1 \neq V_2$ folgt zunächst $U_2 \neq V_1$ und $U_2 \neq V_2$, denn aus $U_2 = V_1$ bzw. $U_2 = V_2$ würde $U_1 = V_2$ bzw. $U_1 = V_1$ folgen, im Widerspruch zur Annahme.

Angenommen $V_1 \subset U_1$: Seien $x \in V_1$ und $y \in U_1 \setminus V_1$. Falls es von x nach y einen Weg geben würde, dann gäbe es einen zu y adjazenten Knoten $z \in U_2$. Wegen $y, z \in V_2$ sind aber y und z nicht adjazent.

In analoger Weise konstruiert man nichtzusammenhängende Knoten x, y in allen Fällen $V_i \subset U_j$ oder $U_i \subset V_j$. Damit bleibt noch der Fall zu untersuchen, dass für alle i, j gilt $V_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Sei $x \in V_1 \cap U_1$ und $y \in V_1 \cap U_2$. Wir nehmen an, dass die Knoten x und y über einen Weg $x = z_1, z_2, \dots, z_n = y$ verbunden sind. Wegen $x \in V_1 \cap U_1$ folgt dann $z_2 \in V_2 \cap U_2$. Entsprechend folgt $z_3 \in V_1 \cap U_1$. Man sieht, dass kein Zwischenknoten z_i und auch nicht der Endknoten y aus $V_1 \cap U_2$ sein kann. Widerspruch!

2. Sei $B = (U_1, U_2, E)$ eine bipartite Zerlegung von G und $m = |U_1|, n = |U_2|$. Dann gilt $|V| = m + n$ und $1 \leq m, 1 \leq n$. Falls V vollständig bipartit ist, dann gilt $|E| = m \cdot n$. In allen Fällen gilt also $|E| \leq m \cdot n$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
 |E| &\leq m \cdot n \\
 &\leq m \cdot n + \frac{(m-n)^2}{4} \\
 &= \frac{4mn + (m-n)^2}{4} \\
 &= \frac{(m+n)^2}{4} = \frac{|V|^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so dass $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

Lösung

1. Angenommen die Behauptung wäre falsch und ein solcher Graph enthielte eine Brücke. Dann würde man durch das Entfernen der Brückenkante zwei nicht zusammenhängende Teilgraphen erhalten, in denen jeweils nur ein Knoten ungeraden Grad hat. Dies ist aber nicht möglich, da die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad bekanntlich gerade sein muss (siehe Vorlesung).

2. e ist eine Brücke $\Rightarrow e$ liegt auf keinem Kreis. Beweis durch Kontraposition:

Wenn die Kante $e = \{v, w\}$ auf einem Kreis liegt, dann kann man e problemlos entfernen ohne den Zusammenhang des Graphen zu zerstören, da v und w ja noch über den verbleibenden Teil des Kreises miteinander verbunden ist. e kann also keine Brücke sein.

e ist eine Brücke $\Leftarrow e$ liegt auf keinem Kreis:

Wenn $e = \{v, w\}$ auf keinem Kreis liegt, dann gibt es keinen Weg von v nach w außer über e . Durch das Entfernen von e wird der Graph also unzusammenhängend. Somit ist e eine Brücke.

Tutoraufgabe 4

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Lösung

1. \Rightarrow 2.: Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph. Nach Vorlesung gilt außerdem $|E| = |V| - 1$.

Sei nun $e = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 \neq v_2$ und $e \notin E$. Der Graph $(V, E \cup \{e\})$ besitzt genau so viele Kanten wie Knoten, er ist also nach Vorlesung kein Baum mehr. Da er aber weiterhin zusammenhängend ist, muss er nun einen Kreis enthalten.

2. \Rightarrow 3.: Wir zeigen zunächst, dass G zusammenhängend ist. Angenommen, G ist nicht zusammenhängend, dann enthält G zwei Knoten v, w , die nicht durch einen Pfad verbunden sind. Das Einfügen von $\{v, w\}$ erzeugt dann keinen Kreis, was der maximalen Kreisfreiheit widerspricht.

Nun beweisen wir, dass G minimal zusammenhängend ist. Sei $\{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante des Graphen. Wenn $(V, E \setminus \{u, v\})$ zusammenhängend ist, so gibt es einen Pfad (u, u_1, \dots, u_r, v) von u nach v mit $u_i \neq u$ und $u_i \neq v$ für $i \in \{1, \dots, r\}$. Damit ist aber (u, u_1, \dots, u_r, v) ein Kreis in G . Widerspruch.

3. \Rightarrow 1.: Wir haben zu zeigen, dass G kreisfrei ist. Würde G aber einen Kreis enthalten, so könnte man eine Kante aus dem Kreis entfernen, ohne die Erreichbarkeit der anderen Knoten zu verletzen. Widerspruch!