Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 10
12. Januar 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 18. Januar 2010, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i der Menge $[6] \subseteq \mathbb{N}$ in Zyklendarstellung und beziehen uns dabei auf die Schreibweisen in Vorbereitungsaufgabe 1 von Blatt 9.

$$p_1 = (1, 5, 4, 6)\,(2)\,(3)\,, \qquad p_2 = (2, 5, 1)\,(3)\,(4)\,(6)\,,$$
$$p_3 = (3, 5, 2)\,(1)\,(4)\,(6)\,, \qquad p_4 = (4, 5, 3)\,(1)\,(2)\,(6)\,.$$

1. Geben Sie eine Zyklendarstellung der Permutation p an, die durch Komposition der p_i wie folgt definiert sei.
$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4\,.$$
2. Bestimmen Sie die kleinste Potenz $k > 0$, so dass $(p_1 \circ p_4)^k$ gleich der identischen Abbildung id ist $(\forall x(id(x) = x))$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{6, 3\}, \{7, 2\}, \{8, 1\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.
2. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code 2,3,4,3,4 dargestellt wird.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit (aufsteigender) Gradfolge $1, 2, 3, 3, 3, 4, 4$ zusammenhängend ist. Wie viele Kanten besitzt jeder solche Graph?
2. Geben Sie 2 nicht isomorphe Graphen an mit Gradfolge $1, 2, 3, 3, 3, 4, 4$. Begründung!
3. Zeigen Sie, dass es keinen bipartiten Graphen mit Gradfolge $1, 2, 3, 3, 3, 4, 4$ gibt.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Besitzt der $K_{3,3}$ eine Euler-Tour? Besitzt der $K_{3,3}$ einen Hamilton-Kreis?
3. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Vorbereitung 2

1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten. Mit $\binom{V}{2}$ bezeichnen wir die Menge der 2-elementigen Teilmengen von V. Es gilt also $E \subseteq \binom{V}{2}$. Dann nennt man $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ den Komplementärgraphen von G.
   (a) Konstruieren Sie für alle $n \in [4]$ 2-(Knoten-)färbare Graphen, deren Komplementärgraph ebenfalls 2-(Knoten-)färbbar ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für $n > 4$ entweder G oder $\overline{G}$ nicht 2-(Knoten-)färbbar ist.
2. Geben Sie einen nicht-planaren Graphen an mit chromatischer Zahl $\chi(G) = 3$)!
3. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl 17 nicht planar ist.

Vorbereitung 3

Wir betrachten die Menge [4] von natürlichen Zahlen als linear geordnete Knotenmenge eines Suchbaumes B.

1. Listen Sie alle möglichen Suchbäume mit [4] als Knotenmenge auf.
2. Wie viele Knoten muß der kleinste vollständige Suchbaum enthalten, der alle Knoten von B enthält?

Tutoraufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie, u. a. mithilfe des Satzes von Kuratowski, die folgenden Aussagen.

1. Wenn ein Graph einen Hamiltonkreis enthält, der auch eine Euler-Tour ist, dann ist der Graph planar.

2. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.

3. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph, d h. G enthalte keinen K_3 als Teilgraphen.
Sei G planar.

1. Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel: $|E| < 2|V|$.

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Polyederformel zunächst nur auf Komponenten von G anwendbar ist.

2. Beweisen Sie: Falls G unzusammenhängend ist, dann besitzt G zwei Knoten vom Grad höchstens 3.

Tutoraufgabe 3

1. Beweisen Sie: Ein Graph mit chromatischer Zahl 3 enthält einen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen.

2. Geben Sie einen Algorithmus an, der bestimmt, ob ein beliebiger Graph $G = (V, E)$ ein Baum ist.