Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 11
20. Januar 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 25. Januar 2010, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei m eine natürliche Zahl. Die Funktionen aus der folgenden Menge $\mathcal{F}_m$ nennen wir *streng involutorisch*:

$$\mathcal{F}_m = \{f : [m] \to [m] \mid \forall x \in [m] : f(x) \neq x \;\wedge\; (f \circ f)(x) = x\}.$$

1. Zeigen Sie, dass jede streng involutorische Funktion $f \in \mathcal{F}_m$ bijektiv ist.
2. Es gelte $m = 2n$. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\mathcal{F}_m| = \prod_{i=1}^{n} (2\,i - 1)\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten Graphen $G = (V, E)$, in denen für alle nichtadjazenten, verschiedenen Knoten $x, y \in V$ (d. h. $x \neq y$ und $\{x, y\} \notin E$) die Gradbedingung $n \leq \deg(x) + \deg(y)$ mit Knotenanzahl $n = |V|$ gilt. Man zeige:
Seien x, y nichtadjazente Knoten und $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ eine beliebige Folge der übrigen $n-2$ Knoten. Dann gibt es einen Index $i \in [n-3]$, so dass x mit k_i und y mit k_{i+1} über jeweils eine Kante verbunden sind, d. h. $\{x, k_i\} \in E$ und $\{y, k_{i+1}\} \in E$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein $(n-3)$-regulärer Graph mit n Knoten.

1. Geben Sie Beispiele an für G mit $n = 4$ und $n = 6$.
2. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt

$$\frac{n}{3} \leq \chi(G) \leq n - 2\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten für Graphen $G = (V, E)$ die erweiterte Form des generischen Suchalgorithmus, in der für jeden besuchten Knoten v dessen Vorgänger $pred[v]$, die Suchnummer $n[v]$ und die Suchtiefe $d[v]$ bestimmt werden.

1. Begründen Sie, warum bei Ausführung des Suchalgorithmus die Suchtiefe für einen Knoten nie überschrieben wird.
2. Bei welchen Auswahlstrategien von Elementen aus der „Worklist W" besteht W stets aus Knoten mit Suchnummern aus einem Abschnitt $[m, n] = [n] \setminus [m-1]$?
3. Ist das Ergebnis der Suchtiefe eines Knotens v bei Anwendung des generischen Suchalgorithmus mit den Strategieen der Breitensuche einerseits oder der Tiefensuche andererseits mit gleichem Startknoten das Gleiche? Begründen Sie Ihre Antwort ggf. mit einem Beispiel!
4. Der Suchalgorithmus werde mit der Strategie der Breitensuche durchgeführt. Nehmen Sie an, dass u vor v aus der Worklist entfernt wird. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $d[u] = d[v]$ gilt.

Vorbereitung 2

Die Länge eines Weges w in einem Graphen ist definiert als die Anzahl der Vorkommen von Kanten in w. Der Abstand $d(u, v)$ zweier verschiedener Knoten u und v in einem einfachen, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als das Minimum aller Längen von Wegen mit Anfangsknoten u und Endknoten v. Zudem wird $d(u, u) = 0$ gesetzt.

1. Zeigen Sie, dass es stets einen Pfad der Länge $d(u, v)$ gibt mit Anfangsknoten u und Endknoten v.
2. Zeigen Sie die Symmetrie $d(u, v) = d(v, u)$ und die Dreiecksungleichung $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$.

Vorbereitung 3

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z. $a \equiv b \pmod{m}$, falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h., falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = b + k \cdot m$ gilt. Genau dann wenn $a \equiv b \pmod{m}$ und gleichzeitig $0 \leq b < m$ gilt, dann gilt $b = a \bmod m$. Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation mod zugrunde legen.
In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division a div m zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a = (a \text{ div } m) \cdot m + (a \bmod m) \,.$$

1. Berechnen Sie: (i) 5 div 4, (ii) (-5) div 4, (iii) $(-x)$ div 1.

2. Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a \pm m) \operatorname{div} m = a \operatorname{div} m \ \pm 1.$$

3. Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a \cdot n) \ \operatorname{div} (m \cdot n) = a \operatorname{div} m \,.$$

Vorbereitung 4

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \bmod m \pmod{m}\,, \\ (a+b) \bmod m &= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \ \bmod m\,, \\ (a \cdot b) \bmod m &= [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \ \bmod m\,. \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Wir führen den Suchalgorithmus mit Breitensuche für einen Graphen $G = (V, E)$ aus mit Startknoten $v_0 \in V$. Man zeige:

1. $\{u, v\} \in E \;\Rightarrow\; d[u] \leq d[v] + 1\,.$
2. Bei Ausführung des Algorithmus gibt es in jedem Zeitpunkt ein k, so dass für alle Knoten v in der Worklist gilt: $k \leq d[v] \leq k + 1\,.$
3. Falls u vor v aus der Worklist entfernt wird, dann gilt $d[u] \leq d[v]\,.$

Tutoraufgabe 2

Gegeben ist die folgende Entfernungstabelle zwischen Städten. Ein Strich (" -") bedeutet, dass keine direkte Verbindung zwischen den Städten angenommen wird. Andernfalls ist die Entfernung in Kilometern angegeben.

	Dortmund	Frankfurt	Karlsruhe	Kassel	Köln	Nürnberg	Mannheim	München	Stuttgart	Ulm
Dortmund	.	-	-	165	83	-	-	-	-	-
Frankfurt	-	.	-	-	189	228	88	-	-	294
Karlsruhe	-	-	.	-	-	-	68	-	82	-
Kassel	165	-	-	.	-	182	-	-	-	465
Köln	83	189	-	-	.	-	-	-	-	-
Nürnberg	-	228	-	182	-	.	-	165	-	-
Mannheim	-	88	68	-	-	-	.	-	-	-
München	-	-	-	-	-	165	-	.	-	138
Stuttgart	-	-	82	-	-	-	-	-	.	92
Ulm	-	294	-	465	-	-	-	138	92	.

1. Zeichnen Sie den zu der Entfernungstabelle gehörigen (ungerichteten) gewichteten Graphen.
2. Bestimmen Sie nach dem Algorithmus von Dijkstra die Entfernung von München nach Köln.
3. Wie müssen Sie den Algorithmus von Dijkstra modifizieren, damit Sie den kürzesten Weg von München nach Köln als Resultat erhalten?

Tutoraufgabe 3

Bestimmen Sie für den Entfernungsgraphen in TA 2 mithilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum.