Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 12
26. Januar 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 1. Februar 2010, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen.

1. Wie viele Kreise der Länge r enthält der vollständige Graph K_n ?
2. Wie viele Kreise enthält der K_n insgesamt?
3. Wie viele Kanten besitzt ein kreisfreier Graph mit k Zusammenhangskomponenten?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten Graphen $G = (V, E)$, in denen für alle nichtadjazenten, verschiedenen Knoten $x, y \in V$ (d. h. $x \neq y$ und $\{x, y\} \notin E$) die Gradbedingung $n \leq \deg(x) + \deg(y)$ mit Knotenanzahl $n = |V|$ gilt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Konstruktion eines Hamiltonkreises in G. Nutzen Sie dabei die in Hausaufgabe 2, Blatt 11 bewiesene Eigenschaft der Graphen mit obiger Gradbedingung.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir gehen von dem in der Tutoraufgabe 2 von Übungsblatt 11 gegebenen Graphen aus, der die Entfernung zwischen bestimmten Städten beschreibt. Wir nehmen aber zusätzlich an, dass eine weitere Verbindung geschaffen wird zwischen Stuttgart und Kassel mit der Entfernung 305 km.

1. Bestimmen Sie nach dem Algorithmus von Dijkstra die durch den entsprechend modifizierten Verbindungsgraphen gegebene Entfernung zwischen München und Dortmund.
2. Bestimmen Sie durch Anwendung des Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum des Graphen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Sei $m > n, m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $(m^2 - n^2) \bmod (m - n)$!
2. Berechnen Sie $(10^{117} + 5^{27} - 30^{1000}) \bmod 3$!
3. Bestimmen Sie $2^{7333333100} \bmod 12$!

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Beweisen oder widerlegen Sie:
Jeder Baum enthält höchstens ein einziges perfektes Matching.

Vorbereitung 2

Zeigen Sie, dass im Folgenden Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ definiert werden, die bezüglich des binären Operators $\circ$ eine kommutative Gruppe bilden.

1. Sei $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$

$$x \circ y = x + y + xy.$$

2. Sei S gleich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ $(= 2^X)$ einer beliebigen Menge X und sei $\circ$ gegeben durch

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Vorbereitung 3

1. Sei $S' = \langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe. Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar in S', falls gilt $(\forall a \in S)\,[\,a \circ x = x \circ a]$. Es sei $V(S')$ die Menge aller in S' vertauschbaren Elemente von S.

   Zeigen Sie, dass $V(S')$ eine Unterhalbgruppe von S' erzeugt.

2. Sei $M = \langle S, \circ \rangle$ ein Monoid mit neutralem Element 1. Wir nehmen an, dass für alle $x \in S$ gilt $x \circ x = 1$.

   Zeigen Sie, dass M eine abelsche Gruppe ist.

Vorbereitung 4

1. Zeigen Sie, dass gilt $\{(7k) \bmod 12 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_{12}$.
2. Welche Ordnung besitzt 11 in $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$? Beweis!

Tutoraufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:
Jeder 3-reguläre Graph enthält ein perfektes Matching.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einer 4-elementigen Trägermenge S und einer Operation $\circ$, die die folgende (2-seitige) Kürzungsregel erfüllt für alle $x, x', y \in S$

$$x \circ y = x' \circ y \;\Rightarrow\; x = x' \quad \wedge \quad y \circ x = y \circ x' \;\Rightarrow\; x = x' \,.$$

Wir fordern außerdem, dass alle "Quadrate" von Elementen aus A (d. h. aus S) linksneutral (linkes Einselement) sind, d. h., dass für alle $x, y \in S$ gilt

$$(x \circ x) \circ y = y \,.$$

1. Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen linken Einselements in A, i. Z. $1_l \in A$.
2. Wir nehmen an, dass 1_l auch rechtes Einselement ist, und können in diesem Fall 1 schreiben für 1_l. Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!

   Machen Sie sich zunächst klar, was die (2-seitige) Kürzungsregel für die Elemente der Spalten bzw. Zeilen der Verknüpfungstafel bedeutet.
3. Wir nehmen nun an, dass 1_l nicht auch rechtsneutral (rechtes Einselement) ist.
   (a) Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!
   (b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Verknüpfungstafel bis auf Isomorphie!
   (c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\circ$ nicht assoziativ und die Algebra A damit keine Halbgruppe ist!

Tutoraufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.
2. In jeder zyklischen additiven Gruppe mit ungerader Ordnung ist die Summe aller Elemente gleich ihrem neutralen Element 0.
3. Es gibt keine zyklische additive Gruppe mit gerader Ordnung, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.
4. Es gibt keine Gruppe mit Primzahlordnung p, die eine echte Untergruppe enthält, i. e. eine Untergruppe weder von der Ordnung p, noch von der Ordnung 1.
5. Ist jede Gruppe der Ordnung 7 kommutativ? Begründung!

Tutoraufgabe 4

$\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot_n \rangle$ mit $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n \text{ und } ggT(x, n) = 1\}$ und $n > 1$ ist bekanntlich eine Gruppe.
Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$ nicht zyklisch ist.
Welche Untergruppen besitzt $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$? Begründung!