Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 14
10. Februar 2010

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 16. Februar 2010, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Mit Blatt 14 können Sie Zusatzpunkte erwerben.
Berechnungsbasis für Bonuspunkte sind Blatt 1 bis 13.

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Eine Tour in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg $v_0, v_1, \ldots, v_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit paarweise verschiedenen Kanten $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ aus E für alle $i \in [n]$. Die Tour heißt geschlossen, falls $v_0 = v_n$ und $n \geq 3$ gilt.
Wir nehmen an, dass G zusammenhängend ist, mindestens 3 Knoten besitzt und alle Knoten in G den Grad 2 oder 4 besitzen.

1. Zeigen Sie, dass jede nicht geschlossene Tour $e_1, e_2, \ldots e_n$ zu einer Tour $e_1, e_2, \ldots e_n, e_{n+1}$ in G verlängert werden kann.
2. Zeigen Sie, dass jeder Knoten v stets Element eines Kreises in G ist.

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $G = \langle S, \circ, e\rangle$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen $e, a, b, c \in S$, in der speziell für a gilt $a^2 = e$ mit dem neutralen Element e.

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.
2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.
3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.

   Zeigen Sie, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Die Menge M aller Abbildungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in $\mathbb{R}$ bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen bekanntlich ein Monoid $\langle M, \circ\rangle$.
Wir betrachten die Teilmenge S aller speziellen Abbildungen $F_{a,b}(x)$ aus M, die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert sind durch die Gleichung

$$F_{a,b}(x) = a \cdot x + b\,.$$

1. Bestimmen Sie für alle $F_{a,b}$ und $F_{c,d}$ die reellen Zahlen e, f, so dass gilt

   $$F_{e,f} = F_{a,b} \circ F_{c,d}\,.$$

   Begründen Sie, warum $\langle S, \circ\rangle$ eine Unteralgebra von $\langle M, \circ\rangle$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ ein Monoid ist.

3. Zeigen Sie, dass $\langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe ist.
   Ist $\langle S, \circ \rangle$ kommutativ?

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

(Aus Klausur 2007)
Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als natürliche Zahl in Dezimaldarstellung an oder als Zahlausdruck. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort möglichst knapp.

1. Wie viele perfekte Matchings besitzt der $K_{3,3}$?

2. Betrachten Sie die Kongruenzrelation $\equiv_{13}$ auf $\mathbb{Z}$.
   Sei A die Kongruenzklasse modulo 13, die die Zahl -100 enthält.
   Wie viele Elemente $x \in A$ gibt es mit $0 \leq x \leq 100$?

3. Geben Sie die Ordnung des Elementes 8 der Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{20}, +_{20} \rangle$ an.

Hausaufgabe 5 (3 Punkte)

(Aus Klausur 2007)
Sei $\pi(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Wir betrachten den endlichen Ring $R = \langle\, \mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \,\rangle$. Sei E die Menge aller Elemente von $\mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)}$, die ein inverses Element bezüglich der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$ besitzen.

1. Zeigen Sie, dass $E' = E \cup \{0\}$ abgeschlossen ist unter der Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$, d. h. $p, q \in E' \Rightarrow p \cdot_{\pi(x)} q \in E'$.

2. Bestimmen Sie E! (Es wird eine Begründung verlangt!)

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die Nullteiler von R vorab zu bestimmen.

3. Zeigen Sie, dass E' nicht abgeschlossen ist unter der Addition $+_{\pi(x)}$, d. h. keinen Unterring von R bildet!