Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 2
26. Oktober 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 2. November 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien a, b, c, d natürliche Zahlen, so dass $ggT(a, b) = 1$ und $ggT(c, d) = 1$ gilt. Für die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ bedeutet dies, dass sie *vollständig gekürzt* sind.
Zeigen Sie: Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ haben genau dann den gleichen Wert, wenn die entsprechenden Zähler und Nenner gleich sind.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir wissen, dass $X \cap \emptyset = \emptyset$ und $X \cup \emptyset = X$ für alle Mengen X gilt.

1. Seien D_1, D_2 und D_3 paarweise disjunkte Mengen. Zeigen Sie, dass für $A = D_1 \cup D_2$ und $B = D_2 \cup D_3$ das Absorptionsgesetz $A \cup (A \cap B) = A$ gilt.

2. Zeigen Sie das Absorptionsgesetz $A = A \cup (A \cap B)$ für beliebige Mengen A, B gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Distributivgesetze bezüglich der Operationen $\cup$ und $\cap$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Gegeben seien $A = \{x, b, 35, x\}$, $B = \{x, b, 2, 3, \delta, x\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}$. Wir definieren $D = B \cup (A \cup C)$, $E = D \cap (A \cap B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup B)$. Berechnen Sie eine extensionale Darstellung von G.

2. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A = \{1, b, \{a, c\}, c\}$. Wie viele Elemente besitzt die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Über $M = \{a, b, c\}$ betrachten wir die folgenden Relationen $R_1 = \{(b, c), (c, b), (a, a)\}$, $R_2 = \{(a, b), (b, c), (c, c), (c, b)\}$ und $R_3 = \{(a, c), (b, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$.

1. Welche dieser Relationen sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

   Begründen Sie Ihre Antworten!

2. Berechnen Sie $R_1 \circ R_2$, R_2^* und R_3^*!

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche $\leq$-Ordnung der Zahlen $[6]$. Wie ergibt sich die $\leq$-Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$. Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Vorbereitung 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!
2. Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$? Begründung!
3. Gilt für $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Vorbereitung 3

1. Eine Aussage ist bekanntlich ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Wir wollen als Lügner jeden Menschen bezeichnen, dessen Aussagen stets falsch sind. Nun trifft der Schiffbrüchige Moritz am Strand von Kreta einen Wanderer. Der Wanderer sagt zu Moritz: „Ich bin ein Kreter und alle Kreter sind Lügner“.

   Was muss für den Wanderer gelten, wenn seine Aussage sinnvoll sein soll? Entscheiden Sie gegebenenfalls, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

2. Tante Agatha ist ermordet worden, und zwar von einem Bewohner von Dreadbury Mansion. In Dreadbury Mansion wohnen Agatha, der Butler und Charles, und niemand sonst. Ein Mörder hasst immer das Opfer und ist niemals reicher als das Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha hasst. Agatha hasst jeden, außer den Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher als Tante Agatha ist. Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha hasst. Niemand hasst alle. Agatha ist nicht der Butler.

   Wer ermordete Tante Agatha? Begründen Sie Ihre Lösung.

Tutoraufgabe 1

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) \mid y = x + 5\}$. Geben Sie R^* an!
3. Sei $M = [3]$. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen R über M. Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

Tutoraufgabe 2

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.
2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition $\circ$ zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv (auf C), dann ist f injektiv und g surjektiv (auf C).

Tutoraufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass $\neg A \vee B \neg$ keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele verschiedene Belegungen gibt es für die Formel $A \Rightarrow B$?
3. Wie viele boolesche Funktionen f gibt es, so dass der Ausdruck $f(\mathbf{true}, B)$ für alle Belegungen stets wahr ist?
4. Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (B \wedge C)\,.$$