Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 3
2. November 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 9. November 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

A, B, C seien beliebige Mengen.

1. Zeigen Sie unter ausschließlicher Verwendung der Identitäten (siehe Lemma in der Vorlesung) Idempotenz, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Neutralität ($X \cup \emptyset = X$) und Nulleigenschaft ($X \cap \emptyset = \emptyset$) die Identität
$$(B \cup (A \cap C)) \cup (A \cup B) = A \cup B$$
2. Wie kann man diese Identität mit Hilfe eines Venn-Diagramms zeigen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{aa, bb\}$ und $B = \{-1, 0, 1\}$.

1. Geben Sie das kartesische Produkt $A \times B$ von $A = \{aa, bb\}$ und $B = \{-1, 0, 1\}$ extensional an!
2. Es bezeichne $\circ$ das Produkt von Relationen. Welche Kardinalität hat $(A \times B) \circ (B \times A)$?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm H für die Relation „x Teiler von y“, i. Z. $x|y$, auf der Teilmenge $M = [25] \setminus [4]$ der natürlichen Zahlen.
2. Geben Sie das Bild der Relation H an und zeigen Sie, dass H keine Abbildung des Urbilds von H in $\mathbb{N}$ darstellt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen gleichmächtig sind, indem Sie eine Vorschrift angeben, wie man alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nacheinander durchlaufen kann!
2. Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}^+ \cup \{0\})$ der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auf die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$!
3. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$!

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Seien x, y, z, p, q Variablenbezeichungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Wie lässt sich das Bikonditional $\Leftrightarrow$ durch einen Ausdruck in den Operatoren $\vee$ und $\neg$ darstellen?
2. Sei β eine Belegung mit $\beta(x) = 1,\ \beta(y) = 0,\ \beta(z) = 1$. Ist β passend zu dem Ausdruck $x \Leftrightarrow z$?
3. Wie viele minimale passende Belegungen gibt es zu $x \Leftrightarrow y$? Welche sind das?
4. Berechnen Sie $[x \Leftrightarrow y](\beta)$, mit obigem β !
5. Ist $x \Leftrightarrow y$ allgemeingültig? Begründung!

Vorbereitung 2

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!
3. Sei $\models F$. Zeigen Sie, dass die Formel $H \Rightarrow F$ eine Tautologie ist für alle Formeln H.

Vorbereitung 3

Zeigen Sie durch Benutzung von Äquivalenzregeln die Allgemeingültigkeit bzw. semantische Äquivalenz der folgenden Ausdrücke.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
2. $q \Rightarrow (p \vee q)$.
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; p \Rightarrow (p \wedge q)$.
4. $q \Leftrightarrow (p \vee q) \;\equiv\; (p \vee q) \Rightarrow q$.

Tutoraufgabe 1

Seien p, q, r, s Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax. Die aussagenlogischen Formeln F und G seien gegeben durch

$$F = (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s) \quad \text{und} \quad G = ((q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)) \Leftrightarrow (q \vee (r \Leftrightarrow s))\,.$$

1. Geben Sie alle zu F passenden, minimalen Belegungen als geeignet sortierte Liste B an.

2. Bestimmen Sie die Bedeutung $[F]$ von F, indem Sie B zu einer Wahrheitstabelle für $[F]$ erweitern.

3. Bestimmen Sie die Semantik von G. Zeigen Sie, dass F und G semantisch nicht äquivalent sind, d. h. $F \not\equiv G$.

Tutoraufgabe 2

Wir übernehmen die Bezeichnungen der vorausgehenden Aufgabe.

1. Zeigen Sie, dass F und $\neg F$ erfüllbare Formeln sind.

2. Zeigen Sie, dass $\neg G$ ein Widerspruch ist. Was bedeutet dies für G?

3. Zeigen Sie, dass $G \models F$ nicht gilt.

4. Sei H eine beliebige aussagenlogische Formel und x eine aussagenlogische Variable. Zeigen Sie, dass $H \Leftrightarrow ((x \Rightarrow H) \wedge (\neg x \Rightarrow H))$ allgemeingültig ist.

Tutoraufgabe 3

Benützen Sie im Folgenden die Ergebnisse von VA 3.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die sogenannte „goldene Regel"

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; q \Leftrightarrow (p \vee q)\,.$$

2. Wir beweisen nun die goldene Regel noch einmal in der allgemeingültigen Form

$$((p \wedge q) \Leftrightarrow p) \;\Leftrightarrow\; (q \Leftrightarrow (p \vee q))\,.$$

   Allerdings soll nun die Fallunterscheidung im Sinne der vorausgehenden Tutoraufgabe TA 2.4 benützt werden. Machen Sie die Fallunterscheidung durch Substitution `true` bzw. `false` für p und wenden Sie entsprechende Äquivalenzregeln zur Vereinfachung an.