Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 4
9. November 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 16. November 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei M eine Menge. Seien R, S und T Relationen über M, d. h. $R, S, T \subseteq M \times M$.

1. Zeigen Sie das Assoziativgesetz $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$!
2. Begründen Sie die Gültigkeit der Gleichung $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ für $n = 2, n = 3, \ldots$! Dabei sei $m \geq 1$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Tupel $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ werden als natürliche Zahlen kodiert mit der folgenden Abbildung $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$c(x, y) = \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2} + x\,.$$

Zeigen Sie die Bijektivität von c!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sämtliche Mengentheoretischen Identitäten entsprechen Aussagenlogischen Äquivalenzregeln. Beweisen Sie entsprechend für beliebige Aussagen x, y, z mithilfe von in der Vorlesung angegebenen Äquivalenzregeln die Äquivalenz

$$(y \vee (x \wedge z)) \vee (x \vee y) \equiv x \vee y\,.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Der „Modus Tollens" bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$(\neg G \land (F \Rightarrow G)) \Rightarrow \neg F\,.$$

Leiten Sie die Korrektheit des Modus Tollens im Herleitungskalkül gemäß Vorlesung ab.

Vorbereitung 2

Begründen Sie die folgende Implikation, die für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik gilt. Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige, endliche Menge von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Dann gilt

$$\mathcal{A} \vdash F \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}, G \vdash F\,.$$

Vorbereitung 3

Seien a, b, c bzw. x, y, z bzw. P, Q Konstanten bzw. Variablen bzw. 2-stellige Prädikate aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Gegeben sei die Struktur $S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x\ (P(x, y) \Rightarrow (\exists y\ Q(x, y)))\,.$$

1. Geben Sie für jedes Vorkommen einer Variablen in F seinen Gültigkeitsbereich an.
2. Entscheiden Sie, welche Vorkommen frei bzw. gebunden sind. Ist F eine geschlossene Formel?
3. Begründen Sie, warum die Struktur S nicht zur Formel F passt!
4. Geben Sie eine möglichst minimale Erweiterung S' der Struktur S an, so dass S' zu F passt und F wahr macht, d. h. $[F](S') = 1$.

Vorbereitung 4

Wir verändern die Formel F aus der vorausgegangenen Aufgabe wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen.

$$G = \forall x\ (P(x, a) \Rightarrow \exists y\ P(x, y))\,.$$

1. Berechnen Sie [G](S)! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!

Tutoraufgabe 1

Seien p, q, r, s, t beliebige Aussagen, für die die Annahmen $\neg p \wedge q$, $r \Rightarrow p$, $\neg r \Rightarrow s$ und $s \Rightarrow t$ gelten. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln die Gültigkeit der Konklusion

$$(\neg r \wedge s) \wedge t\,.$$

Protokollieren Sie die Anwendungen der Inferenzregeln.

Tutoraufgabe 2

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige, endliche Mengen von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik die folgende Implikation.

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \text{und} \quad \mathcal{B}, F \vdash G \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash G\,.$$

Tutoraufgabe 3

Definieren Sie eine Struktur S, in der gleichzeitig die beiden folgenden Formeln wahr sind.

$$\neg\exists x\ (\forall y\ P(x,y)) \quad \text{und} \quad \forall y\ (\exists x\ P(x,y))\,.$$

Tutoraufgabe 4

1. Widerlegen Sie: $\exists x\ \forall y\ Q(x,y) \ \equiv\ \forall y\ \exists x\ Q(x,y)\,.$
2. Geben Sie eine zu $\neg\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ äquivalente Formel an, so dass der Verneinungsoperator ($\neg$) nicht links neben einem logischen Quantor vorkommt.