Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 5
16. November 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 23. November 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Semantik der binären logischen Operatoren $\Leftrightarrow$ und $\otimes$ wurde in der Vorlesung durch Wahrheitstabellen definiert, aus denen man die den Operationen entsprechenden disjunktiven Normalformen ablesen kann und damit die Identitäten $x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ bzw. $x \otimes y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ erhält.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln der Vorlesung und den genannten Normalformen für alle aussagenlogischen Formeln F, G und H die Identität

$$F \Leftrightarrow G \;\equiv\; \neg(F \otimes G)\,.$$

2. Zeigen Sie durch Anwendung von Fallunterscheidungen gemäß den Tutoraufgaben 2 und 3 von Übungsblatt 3 die Assoziativität

$$(F \Leftrightarrow G) \Leftrightarrow H \;\equiv\; F \Leftrightarrow (G \Leftrightarrow H)\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\triangle$ ein 3-stelliger logischer Operator mit einer Wahrheitsfunktion $[\triangle] : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ als Bedeutung. Wir lassen nun aussagenlogische Ausdrücke $\triangle(F,G,H)$ für Formeln F, G und H zu.

1. Für die Wahrheitsfunktion $[\triangle]$ gelte $[\triangle](0,1,1) = 0$, d. h., es sei $[\triangle(x,y,z)](\beta) = 0$ für die Belegung β mit $\beta(x) = 0$, $\beta(y) = 1$ und $\beta(z) = 1$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung

$$\triangle(x,y,z) \;\equiv\; (x \vee \neg y \vee \neg z) \;\wedge\; \triangle(x,y,z)\,. \tag{1}$$

2. Wir nehmen $[\triangle](1,0,1) = 0$ und $[\triangle](1,1,0) = 0$ an. Außerdem habe die Wahrheitsfunktion $[\triangle]$ für alle sonstigen 3 Argumente den Wert 1.

   Geben Sie eine zur Äquivalenz (1) analoge Gleichung für $\triangle(x,y,z)$ an und entwickeln Sie daraus für $\triangle$ einen äquivalenten („mehrfach"-)konjunktiven Ausdruck über den logischen Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie.

1. Eine aussagenlogische Formel F ist erfüllbar, falls ihre Verneinung $\neg F$ ein Widerspruch ist.
2. Zur Formel $F = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$ gibt es genau 4 minimale passende Belegungen, die F wahr machen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien P, Q und R aussagenlogische Formeln und $\mathcal{A}$ eine Konjunktion von aussagenlogischen Formeln. Zeigen Sie:

1. Falls $\mathsf{true} \models P \Rightarrow Q$ und $Q \vdash R$ gilt, dann ist $P \Rightarrow R$ allgemeingültig.
2. Zeigen Sie durch Anwendung der Regeln des Herleitungskalküls:

   Falls $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow Q$ und $\mathcal{A} \vdash Q \Rightarrow R$, dann ist $P \Rightarrow R$ aus $\mathcal{A}$ herleitbar, d. h. $\mathcal{A} \vdash P \Rightarrow R$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir definieren ein Universum U als Vereinigung der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und der Menge F aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Seien $N^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung $x_S \in \mathbb{N}$, $P^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung, dass x_S eine positive reelle Zahl ist, d. h. $x_S \in \mathbb{R}, x_S > 0$ gilt. Sei $F^1(f)$ das Prädikat mit $f_S \in F$ und schließlich $V^4(f, g, n, \epsilon)$ das Prädikat mit der Bedeutung $|f_S(n_S)| \leq \epsilon_S \cdot g_S(n_S)$ mit $n_S \in \mathbb{N}$, $\epsilon_S \in P^1_S$ und $f_S, g_S \in F$.

Seien f_S und g_S Elemente von F, so dass $f_S(n) = 2$ und $g_S(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1. Für welche $n_S \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_S \in \mathbb{R}$ gilt $V^4(f, g, n, \epsilon)$? Geben Sie die Lösung als Menge von Paaren (n_S, ϵ_S) an.
2. Sei $G^2(n, n_0)$ das Prädikat, das genau dann wahr ist, wenn $N^1(n) \wedge N^1(n_0) \wedge (n \geq n_0)$ gilt. Für welche n_0 gilt die Formel $\forall n\ (G^2(n, n_0) \Rightarrow V^4(f, g, n, \epsilon))$?

Vorbereitung 2

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls. Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln $\exists x\ P(x)$ und $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)\,.$$

Tutoraufgabe 1

Im Folgenden betrachten wir Relationen $R \subseteq M \times M$ über einer Menge M. Sei $\trianglelefteq$ ein 2-stelliges Prädikatsymbol. Zur Vereinfachung der Schreibweise für $\trianglelefteq(x, y)$ wollen wir $x \trianglelefteq y$ schreiben. Wir sagen, dass $\trianglelefteq$ die *min*-Eigenschaft besitzt, falls gilt

$$\forall x \ \exists y \ \forall z \ (z \trianglelefteq x \Rightarrow y \trianglelefteq z) .$$

1. Zeigen Sie mit einer möglichst einfachen, passenden Struktur, dass die Formel erfüllbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die totale Ordnungsrelation $\leq$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die *min*-Eigenschaft besitzt.

3. Geben Sie ein Beispiel einer nicht totalen partiellen Ordnungsrelation an, die die *min*-Eigenschaft besitzt.

Tutoraufgabe 2

Seien M und P prädikatenlogische Formeln. Wir verwenden häufig die abkürzenden Schreibweisen

$$\forall x, M\colon P \quad \text{für} \quad \forall x \ (M \Rightarrow P) \qquad \text{und} \qquad \exists x, M\colon P \quad \text{für} \quad \exists x \ (M \wedge P) .$$

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze

$$\neg(\forall x, M\colon P) \ \equiv \ \exists x, M\colon \neg P \qquad \text{bzw.} \qquad \neg(\exists x, M\colon P) \ \equiv \ \forall x, M\colon \neg P .$$

2. Wir nehmen Individuenvariablen f, g, ϵ, n, n_0 sowie Prädikate P^1, N^1, G^2, V^4 und o^2 mit den angegebenen Stelligkeiten an. Sei

$$o^2(f, g) \ \equiv \ \forall \epsilon, P^1(\epsilon)\colon \exists n_0, N^1(n_0)\colon \forall n, G^2(n, n_0)\colon V^4(f, g, n, \epsilon) .$$

   Zeigen Sie

$$\neg o^2(f, g) \ \equiv \ \exists \epsilon, P^1(\epsilon)\colon \forall n_0, N^1(n_0)\colon \exists n, G^2(n, n_0)\colon \neg V^4(f, g, n, \epsilon) .$$

Bemerkung: Diese Aufgabe wird uns helfen, die komplexen Definitionen zum Wachstum von Funktionen zu analysieren.

Tutoraufgabe 3

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.

1. Die Menge $\mathcal{A}$ bestehe aus den beiden Formeln $\forall x \, P(x)$ und $\exists x \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x \, Q(x) .$$

2. Die Menge $\mathcal{A}$ bestehe aus den beiden Formeln $\exists x \, P(x)$ und $\exists x \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Warum kann mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz $\mathcal{A} \vdash \exists x \, Q(x)$ nicht gefolgert werden?