Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 6
23. November 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 30. November 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Seien $\mathcal{A}$ eine Annahmenmenge im Herleitungskalkül der Aussagenlogik, H eine Formel und x eine Aussagenvariable. Zeigen Sie durch Anwendung von Regeln des Herleitungskalküls, dass aus den Inferenzen $\mathcal{A}, x \vdash H$ und $\mathcal{A}, \neg x \vdash H$ die Inferenz $\mathcal{A} \vdash H$ folgt.

2. Wir betrachten $\mathcal{A} = \{\exists x\, P(x)\}$ im Herleitungskalkül der Prädikatenlogik. Sei a eine Konstante. Wo genau liegt der Fehler in der folgenden Herleitung von $\mathcal{A} \vdash \forall x\, P(x)$?

Nr.	Annahmen		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a)$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\, P(x)$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$P(a)$	1.+2.+ Existenzquantorbeseitigung
4.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\forall x\, P(x)$	3.+ Allquantoreinführung .

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien a, b bzw. x, y, z bzw. P Konstanten bzw. Variablen bzw. ein 3-stelliges Prädikat aus dem Vokabular des Prädikatenkalküls. Wir betrachten die Formel F mit

$$F \;=\; (x = a) \;\wedge\; \forall x\, \exists y\, \exists z\; (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge P(b, y, z))\,.$$

1. Geben Sie für jedes Vorkommen einer Variablen in F seinen Gültigkeitsbereich an.
2. Entscheiden Sie, welche Vorkommen von Variablen in F frei bzw. gebunden sind.
3. Geben Sie möglichst „minimale" Strukturen S_1 und S_2 an, die zu F passen und F wahr bzw. falsch machen, so dass also $[F](S_1) = 1$ bzw. $[F](S_2) = 0$ gilt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Abbildungen $f : A \to B$ einer Menge A in eine Menge B kann man als binäre Relationen R auffassen, wobei $(x, y) \in R$ genau dann gilt, wenn $f(x) = y$ gilt. Wir betrachten nun einstellige Prädikate M und N, und ein zweistelliges Prädikat P.

1. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F für die genannten Prädikate an, so dass für alle zu F passenden Strukturen $S = (U, I)$, die F wahr machen, gilt:

   $I(P)$ ist eine Abbildung von $I(M)$ in $I(N)$.

2. Leiten Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln eine zu $\neg F$ äquivalente Formel G her, so dass der Operator $\neg$ in G nie links von einem Quantor steht.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien P, Q, R und S prädikatenlogische Formeln, die jeweils die Individuenkonstante a enthalten. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen durch Anwendung von Äquivalenzregeln.

1. Wir nehmen an, dass die Variable x in Q nicht vorkommt und y in P nicht vorkommt. Dann gilt
$$\forall x\, P \;\vee\; \forall y\, Q \;\equiv\; \forall x\, \forall y\, (P \;\vee\; Q)\,.$$

2. Wir nehmen an, dass die Variablen z, u und v nicht in P vorkommen. Wir nehmen auch an, dass die Variable u nicht in R vorkommt und die Variable v nicht in Q vorkommt. Dann gilt
$$\forall y\, [P \wedge \exists z\, (\forall u\, Q \vee \forall v\;R)] \;\equiv\; \forall y\, \exists z\, \forall u\, \forall v\; [P \wedge (Q \vee R)]\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Machen Sie sich mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion ausreichend vertraut und geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:
$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\,, \qquad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n}\,.$$

Hinweis: Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q. Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x. Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit $\log_b x$ bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige Basen gelten, so schreibt man häufig $\log x$. Die wichtige Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann
$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir $\ln x$ bzw. $\lg x$ bzw. $\mathrm{ld}\, x$.

Vorbereitung 2

Geben Sie für die folgenden Aussage einen direkten Beweis an.
Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \; = \; \frac{1}{n+m}(\sum_{i=1}^{n} a_i \; + \; m \cdot b) \; = \; b\,.$$

Hinweis: Für beliebige Funktionen $f(x)$, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind, können eine Summenfunktion Σ und eine Produktfunktion $\prod$ definiert werden der Form

$$\sum_{i=i_0}^{n} f(i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{n} f(i)\,.$$

Dabei sind i, i_0, n ganze Zahlen mit $n \geq i_0$. Es gilt

$$\sum_{i=i_0}^{i_0} f(i) = f(i_0) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{i_0} f(i) = f(i_0)$$

und

$$\sum_{i=i_0}^{n+1} f(i) = f(n+1) + \sum_{i=i_0}^{n} f(i) \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=i_0}^{n+1} f(i) = f(n+1) \cdot \prod_{i=i_0}^{n} f(i)\,.$$

Eine intuitive Vorstellung von der Summendefinition bekommt man durch die Schreibweise $\sum_{i=i_0}^{n} f(i) = f(i_0) + f(i_0+1) + \ldots + f(n-1) + f(n)$.

Vorbereitung 3

Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion die folgenden Gleichungen für jeweils alle passenden Parameterbelegungen.

1. Im Folgenden wird die 1 als konstante Funktion für alle i aufgefasst.

$$\sum_{i=i_0}^{n} f(i) = \sum_{i=i_0+k}^{n+k} f(i-k)\,, \qquad \sum_{i=i_0}^{n} 1 = n - i_0 + 1\,.$$

2. $$(a \cdot \sum_{i=i_0}^{n} f(i)) \; + (b \cdot \sum_{i=i_0}^{n} g(i)) \; = \sum_{i=i_0}^{n}(a \cdot f(i) + b \cdot g(i))\,.$$

Vorbereitung 4

Für reellwertige Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $o(g(n))$ aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, die ein kleineres Wachstum besitzen als g, wie folgt definiert:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)[|f(n)| < \varepsilon \cdot g(n)]\,.$$

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ hat für gegen ∞ strebendes n den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die für alle n den Wert 1 besitzt.

Man zeige unter sorgfältiger Beachtung der Definitionen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die 3 methodischen Ansätze zum Beweis mathematischer Aussagen:
1. den direkten Beweis, 2. den indirekten Beweis und 3. den Widerspruchsbeweis.
Die Vorbereitungsaufgaben 1 und 2 verlangen jeweils einen direkten Beweis der betreffenden Aussagen. Im Folgenden soll in der ersten Teilaufgabe ein indirekter Beweis geführt werden, während die 2. Teilaufgabe durch Widerspruch zu beweisen ist.

1. Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie: Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k + 1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Hamster befinden.

2. Die reelle Zahl $\log_{10} 3$ ist keine rationale Zahl, d. h., sie ist nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar.

Tutoraufgabe 2

Sei $f : \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die für $n = 0$ bzw. $n = 1$ die Werte $f(0) = 1$ bzw. $f(1) = 4$ annimmt und für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 4 \cdot (f(n) - f(n-1)) .$$

Man zeige mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f(n) = (n+1) \cdot 2^n .$$

Tutoraufgabe 3

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen und g habe höchstens endlich viele Nullstellen. Zeigen Sie:

$$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0 .$$

Tutoraufgabe 4

Man beachte, dass wir im Folgenden die Schreibweise prädikatenlogischer Ausdrücke nicht mehr nach dem früher eingeführten Kalkül ausrichten, sondern an die mathematischen Erfordernisse anpassen. Der Bezug zum Kalkül ist aber jederzeit rekonstruierbar.

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt bekanntlich $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

   $$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [2^n \geq 5 \cdot n^2] .$$

2. Geben Sie Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

   $$f(n) \notin o(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|) .$$