Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 7
30. November 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 7. Dezember 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten surjektive Abbildungen $f : [4] \to [4]$ mit der Eigenschaft, dass es (mindestens) ein Element $x \in [4]$ gibt, so dass $f(x) = x$ gilt.

Wieviele derartige Abbildungen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort durch Auflistung aller Abbildungen mit dieser Eigenschaft!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Beweisen Sie direkt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\sum_{i=-n}^{n} i(-1)^i = 0\,.$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$\sum_{i=-n}^{-1} i(-1)^i = \frac{1-(2n+1)(-1)^n}{4}\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien f und g Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, die durch die Gleichungen $f(n) = \log n$ und $g(n) = \sqrt{n}$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass $f \in o(g)$ gilt, d. h.

$$\forall c, c \in \mathbb{R}, c > 0 :\ \exists n_0, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ |f(n)| < c \cdot g(n) \qquad (*)$$

gilt, indem Sie für beliebiges $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ konstruieren, so dass die Formel

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ |f(n)| < c \cdot g(n)$$

erfüllt ist. Die Gültigkeit der Formel $(*)$ ist für das konstruierte n_0 nachzuweisen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie für alle Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch Widerspruchsbeweis und Rückgriff auf die Definitionen von $o(f)$ und $\omega(f)$ in der Vorlesung

$$o(|g(n)|) \cap \omega(|g(n)|) = \emptyset\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?
2. Wie viele Relationen über M mit $k \in \mathbb{N}_0$ Elementen gibt es?
3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?
4. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A. Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}_0$ an und begründen Sie diese Formel.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Vorbereitung 2

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!
2. Wie viele Partitionen gibt es über M?
3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?
4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?
5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?
6. Geben Sie alle Variationen von M an!

Begründen Sie Ihre Antworten.

Vorbereitung 3

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine dieser Art gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   MINIMALISIERUNG

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Vorbereitung 4

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von $x^3y^2z^2$ und x^2z^3 in $(x + xy + z)^5$.

Tutoraufgabe 1

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele der Relationen sind nicht Funktionen mit Definitionsbereich M?
2. Wie viele der Relationen sind totale Ordnungen von M?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen bijektiven Abbildungen $f : M \to M$, totalen Ordnungen und Permutationen von M?

Tutoraufgabe 2

Die Menge der injektiven Abbildungen einer Menge M in eine Menge N bezeichnen wir mit $Inj(M, N)$. Seien M und N endliche Mengen mit $|M| \leq |N|$.

1. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|Inj(M, N)| \;=\; |N| \cdot |Inj(M \setminus \{x\}, N \setminus \{y\})| \,.$$

2. Die Anzahl der Elemente in M bzw. N sei m bzw. n. Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N gegeben ist durch

$$n^{\underline{m}} := \prod_{i=1}^{m} (n - i + 1).$$

<u>Hinweis:</u> Für $m = 0$ besitzt das "leere" Produkt definitionsgemäß den Wert 1.

Tutoraufgabe 3

1. Wie viele verschiedene Ergebnisse ("Wurfkonstellationen") kann es geben, wenn man mit 4 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Zwei Würfel sind blau und zwei Würfel sind grün.

2. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ABRAKADABRA* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das A genau fünfmal vorkommen.)

Tutoraufgabe 4

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Man zeige

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Sei M eine Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wie viele Multiteilmengen von M mit höchstens k Elementen gibt es, wenn man $n = 6$ und $k = 3$ annimmt. Leiten Sie zunächst eine Formel ab für beliebiges n und k.

3. Bestimmen Sie den Koeffizienten von $t^4 x y^3 z$ in $(x + y + z + t)^9$.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.