
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 11. Januar 2010, 14 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele verschiedene Tupel (A_1, A_2) mit disjunkten und nicht leeren $A_1, A_2 \subseteq [n]$ gibt es? Begründung!
2. Wie viele Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^5$ der folgenden Gleichung gibt es:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in 5 nicht unterscheidbare Pakete 15 gleiche Äpfel zu verteilen, wenn in jedem Paket mindestens 1 Apfel enthalten sein soll?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist.
2. Zeigen Sie nun durch vollständige Induktion, dass die 2^n -te Zeile des Pascalschen Dreiecks für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur aus ungeraden Zahlen besteht.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Stirling-Zahlen zweiter Art.

$$S_{n+1, k+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i, k}.$$

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_1, a_2, \dots, a_{|M|})$ ein $|M|$ -Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$. Dann nennen wir die Abbildung $\pi_z : M \rightarrow M$ mit $\pi_z(a_i) = a_{(i \bmod |M|)+1}$ einen *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z . Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π . Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
Welche verschiedenen Darstellungen hat π_z^3 ? Ist π_z^4 ein Zyklus?

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind. Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zykluspartition*. Dabei bildet die Menge der Basismengen $P_Z = \{M(\pi) \mid \pi \in Z\}$ eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen $M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)$. Wir sagen, dass Z eine Zykluspartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?
Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!
Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zykluspartition von $[n]$?

Sei Z eine Zykluspartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \rightarrow [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls } i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z.$$

3. Zykluspartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklendarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.
Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zykluspartition.
Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\}$!

Bestimmen Sie eine Zyklendarstellung von f , d. h. eine Zykluspartition Z von $[9]$, so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

5. Sei f wie vorhin.

Geben Sie eine Matrixdarstellung von f^2 an!

Geben Sie eine Zyklendarstellung von f^2 an!

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k > 0$, so dass $f^k = id$ gilt, wobei id die identische Abbildung ist!

Vorbereitung 2

Stellen Sie für den Graph

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, h\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{g, h\}\})$$

1. die Inzidenzmatrix und die Adjazenzmatrix auf.
2. Welche Zusammenhangskomponenten hat G ?
3. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G .

Vorbereitung 3

Die absteigende Gradfolge eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $d(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?
i) 2, 1, 0. ii) 3, 3, 3, 3, 2, 2. iii) 3, 3, 3, 2, 2, 2.
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Vorbereitung 4

1. Zeigen Sie, dass der Graph C_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ bipartit ist.
Gilt das Gleiche auch für C_{2n+1} ?
2. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Vorbereitung 5

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v .
Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k -reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
Hinweis: Ein Graph heißt k -regulär, wenn alle Knoten den Grad k haben.
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Vorbereitung 6

1. Gegeben seien die Bäume

$$B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\}),$$

$$B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\}).$$

Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.
i) 6 7 7 7 7 7 7 7, ii) 1 1 1 2 1 2 1, iii) 3 4 5 6 7 8 9.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Permutationen einer n -elementigen Menge mit k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$s_{0,0} = 1, \quad s_{n,n} = 1. \quad s_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad s_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0.$$

2. Beweisen Sie mithilfe eines kombinatorischen Arguments, dass gilt:

$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1).$$

Tutoraufgabe 2

1. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_1$, $U_1 \neq V_2$ gilt.

Zeigen Sie, dass G zwei verschiedene Komponenten besitzt.

2. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$. Beweis!

Tutoraufgabe 3

Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so dass $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

Tutoraufgabe 4

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.