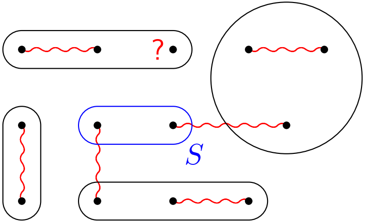
Satz 130

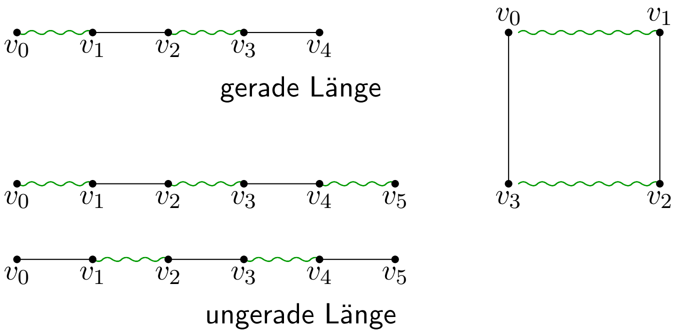
(ohne Beweis) Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|V|$ gerade ist und es kein $S \subseteq V$ gibt, so dass der durch $V \setminus S$ induzierte Teilgraph mehr als $|S|$ Zusammenhangskomponenten ungerader Größe enthält.



Bemerkung: Die Richtung „⇒“ ist klar, da in einem perfekten Matching in jeder „ungeraden“ ZHK mindestens ein Knoten mit einem Knoten in S gematcht sein muss.

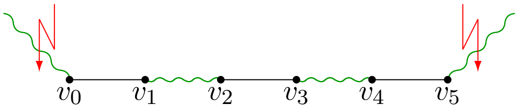
Definition 131

1. Ein einfacher Pfad (Kreis) $v_0, v_1, \ldots, v_r$ heißt alternierend bzgl. eines Matchings M, falls die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < r$, abwechselnd in M und nicht in M liegen.



Definition 131

2. Ein alternierender Pfad bzgl. eines Matchings M heißt augmentierend, falls er bzgl. „$\subseteq$" maximal ist und an beiden Enden ungematchte Knoten hat.



ungerade Länge

Bemerkung: Es kann keine augmentierenden Kreise geben.

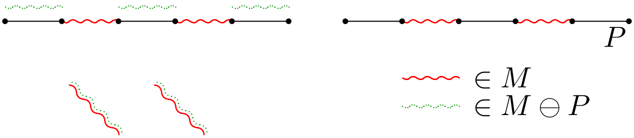
Definition 132

Seien S, T zwei Mengen, dann bezeichne $S \ominus T$ die symmetrische Differenz von S und T, d.h. $S \ominus T = (S - T) \cup (T - S)$.

Lemma 133 (Augmentierung eines Matchings)

Sei M ein Matching, P ein augmentierender Pfad bzgl. M. Dann ist auch $M \ominus P$ ein Matching, und es gilt $|M \ominus P| = |M| + 1$.

Beweis:



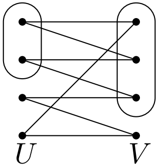
$\square$

Satz 134 (Heiratssatz [Frobenius, Hall, Rado, König])

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. G enthält ein Matching der Kardinalität $|U|$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall A \subseteq U : |N(A)| \geq |A|,$$

wobei $N(A)$ die Nachbarschaft von A (in V) bezeichnet.



Beweis:
Die Richtung („$\Rightarrow$“) ist klar.

„$\Leftarrow$“: M sei ein maximum Matching in G. Annahme: $|M| < |U|$. Sei $A' \subseteq U$ die Teilmenge der durch M nicht gematchten Knoten in U. Seien weiter A (bzw. B) die von A' aus mittels alternierender Pfade erreichbaren Knoten in U (bzw. V). Enthält B einen ungematchten Knoten, dann ist ein dazugehöriger alternierender Pfad P augmentierend und $|M \ominus P| > |M|$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Andernfalls ist $|A| > |B|$ (da A zu jedem Knoten in B seinen gematchten Partner enthält), aber auch, im Widerspruch zur Voraussetzung, $N(A) \subseteq B$, also $|N(A)| < |A|$. $\square$

Alternativer Beweis:

Die Richtung („$\Rightarrow$") ist (noch immer) klar.

„$\Leftarrow$": Sei M ein Matching in G, mit $|M| < |U|$, und sei $u_0 \in U$ ein in M ungematchter Knoten. Da $|N(\{u_0\})| \geq 1$, hat u_0 einen Nachbarn $v_1 \in V$. Falls v_1 ungematcht ist, sind wir fertig, da wir einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Andernfalls sei $u_1 \in U$ der mit v_1 gematchte Knoten. Dann ist $u_1 \neq u_0$ und $|N(\{u_0, u_1\})| \geq 2$, und es gibt einen Knoten $v_2 \in V$, der zu u_0 oder u_1 adjazent ist.

Falls v_2 in M nicht gematcht ist, beenden wir die Konstruktion, andernfalls fahren wir in obiger Weise fort und erreichen, wegen $|V| < \infty$, schließlich einen ungematchten Knoten $v_r \in V$. Damit haben wir aber wiederum einen augmentierenden Pfad $P = (v_r, u_{i_1}, v_{i_1}, \ldots, u_{i_k}, v_{i_k}, u_0)$ (mit $i_1 > \cdots > i_k$) gefunden! $\square$

Definition 135

Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt Träger von G (engl. vertex cover), falls D mit jeder Kante in E mindestens einen Knoten gemeinsam hat (also „jede Kante bedeckt").

Beobachtung: Sei D ein Träger von G und M ein Matching in G. Dann gilt offensichtlich

$$|D| \geq |M|\,,$$

da der Träger D jede Kante im Matching M treffen muss und die Kanten in M alle paarweise disjunkt sind.

Korollar 136

Seien D und M wie oben. Dann gilt

$$\min_D\{|D|\} \geq \max_M\{|M|\}\,.$$

Satz 137

Sei $G = (U, V, E)$ *ein (ungerichteter) bipartiter Graph. Dann gilt*

$$\min\{|D|;\ D \text{ \textit{Träger von} } G\} = \max\{|M|;\ M \text{ \textit{Matching in} } G\}$$

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Knoten in G Grad ≥ 1 haben. Sei M ein maximum Matching in G, sei $A \subseteq U$ die von M gematchte Teilmenge von U, $B \subseteq V$ die von V.

Sei nun B' die Menge der Knoten in V, die von $U \setminus A$ aus mittels eines alternierenden Pfades erreichbar sind. Dann ist $B' \subseteq B$, da wir andernfalls einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Sei A' die Menge der Knoten in A, die durch M mit Knoten in B' gematcht sind. Dann gibt es keine Kante zwischen A' und $V \setminus B$, da jede solche Kante wiederum zu einem augmentierenden Pfad führen würde.

Es gilt (i) $N(U \setminus A) \subseteq B'$, (ii) $N(A') = B'$, (sowie (iii) $N(V \setminus B) \subseteq A \setminus A'$). Damit ist $B' \cup (A \setminus A')$ ein Träger von G. Da $|A| = |M|$ und $|A'| = |B'|$, folgt die Behauptung. □

Satz 138 (Berge (1957))

Ein Matching hat maximale Kardinalität genau dann, wenn es keinen augmentierenden Pfad dafür gibt.

Beweis:

s.u. $\square$

Lemma 139

Seien M, N Matchings in G, und sei $|N| > |M|$. Dann enthält $N \ominus M$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M.

Beweis:

Der Grad eines Knotens in $(V, N \ominus M)$ ist ≤ 2. Die Zusammenhangskomponenten von $(V, N \ominus M)$ sind also

1. isolierte Knoten
2. einfache Kreise (gerader Länge)
3. alternierende Pfade

Seien $C_1, \ldots, C_r$ die Zusammenhangskomponenten in $(V, N \ominus M)$, dann gilt:

$$M \ominus \underbrace{C_1 \ominus C_2 \ominus \cdots \ominus C_r}_{N \ominus M} = N$$

Nur die C_i's, die augmentierende Pfade bzgl. M sind, vergrößern die Kardinalität des Matchings, und zwar jeweils um genau 1. Also muss es mindestens $|N| - |M|$ C_i's geben, die augmentierende Pfade bzgl. M sind (und knotendisjunkt, da ZHKs).

Korollar 140

Satz von Berge

2. Kürzeste augmentierende Pfade

Lemma 141

Sei M ein Matching der Kardinalität r, und sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$, $s > r$. Dann gibt es einen augmentierenden Pfad bzgl. M der Länge $\leq 2\left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor + 1$.

Beweis:

Sei N ein Matching maximaler Kardinalität in G, $|N| = s$. $N \ominus M$ enthält $\geq s - r$ augmentierende Pfade bzgl. M, die alle knotendisjunkt und damit auch kantendisjunkt sind. Falls einer dieser Pfade Länge 1 hat, sind wir fertig. Ansonsten enthält mindestens einer dieser augmentierenden Pfade $\leq \left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor$ Kanten aus M. □

Lemma 142

Sei P ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M, und sei P' ein augmentierender Pfad bzgl. des neuen Matchings $M \ominus P$. Dann gilt:

$$|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$$

Beweis:

$N = M \ominus P \ominus P'$, also $|N| = |M| + 2$. Also enthält $M \ominus N$ mindestens 2 knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M, etwa P_1 und P_2. Es gilt:

$$\begin{aligned} |N \ominus M| &= |P \ominus P'| \\ &= |(P - P') \cup (P' - P)| \\ &= |P| + |P'| - 2|P \cap P'| \\ &\geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|, \end{aligned}$$

also

$$|P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq 2|P|,$$

also

$$|P'| \geq \underbrace{2|P| - |P|}_{|P|} + 2|P \cap P'|$$

$\square$

Schema für Matching-Algorithmus:

1. Beginne mit Matching $M_0 := \emptyset$.
2. Berechne Folge $M_0,\ P_0,\ M_1,\ P_1, \ldots,\ M_i,\ P_i, \ldots$, wobei jeweils P_i ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M_i ist und

$$M_{i+1} := M_i \ominus P_i\,.$$

Im obigen Schema gilt

$$|P_{i+1}| \geq |P_i| \text{ für alle } i\,.$$

Lemma 143

Seien P_i und P_j in obiger Folge zwei augmentierende Pfade gleicher Länge. Dann sind P_i und P_j knotendisjunkt.

Beweis:

Annahme: es gibt eine Folge $(P_k)_{k\geq 0}$ mit $|P_i| = |P_j|$, $j > i$, $P_i \cap P_j \neq 0$, $j - i$ minimal gewählt. Durch die Wahl von j sind die Pfade $P_{i+1}, \ldots, P_j$ knotendisjunkt. Also ist P_j auch ein augmentierender Pfad bzgl. $M' := M_{i+1}$, dem Matching nach den Augmentierungen mit $P_0,\ P_1, \ldots, P_i$. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt $|P_j| \geq |P_i| + 2|P_i \cap P_j|$, also P_i, P_j kantendisjunkt, da $|P_i| = |P_j|$. Da in M' jeder Knoten in P_i gematcht ist (und dies dann auch in $M' \ominus P_{i+1} \ominus P_{i+2} \ominus \cdots \ominus P_{j-1}$ gilt), können auch P_i und P_j keinen Knoten gemeinsam haben. □

Satz 144

Sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$. Dann enthält die Folge $|P_0|, |P_1|, \ldots$ höchstens $\lfloor 2\sqrt{s} + 1 \rfloor$ verschiedene Werte.

Beweis:

Sei $r := \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ $(= s - \lceil \sqrt{s} \rceil)$. Per Konstruktion ist $|M_i| = i$, also $|M_r| = r$. Mit Lemma 141 folgt

$$|P_r| \leq 2 \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{s}{\sqrt{s}} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \sqrt{s} \right\rfloor + 1.$$

Für $i \leq r$ ist also $|P_i|$ eine der ungeraden Zahlen in $[1, 2\sqrt{s} + 1]$, also eine von $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ ungeraden Zahlen. $P_{r+1}, \ldots, P_{s-1}$ tragen höchstens $s - r - 1 < \sqrt{s}$ zusätzliche Längen bei. □

Verfeinertes Schema:

$M := \emptyset$
while $\exists$ augmentierender Pfad bzgl. M **do**
  $l :=$ Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M
  bestimme eine bzgl. „$\subseteq$ “ maximale Menge $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ augmentierender Pfade bzgl. M, die alle Länge l haben und knotendisjunkt sind
  $M := M \ominus Q_1 \ominus \cdots \ominus Q_k$
od

Korollar 145

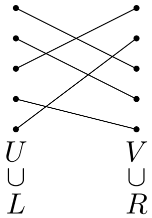
Die obige $while$*-Schleife wird höchstens* $\mathcal{O}\left(|V|^{\frac{1}{2}}\right)$ *mal durchlaufen.*

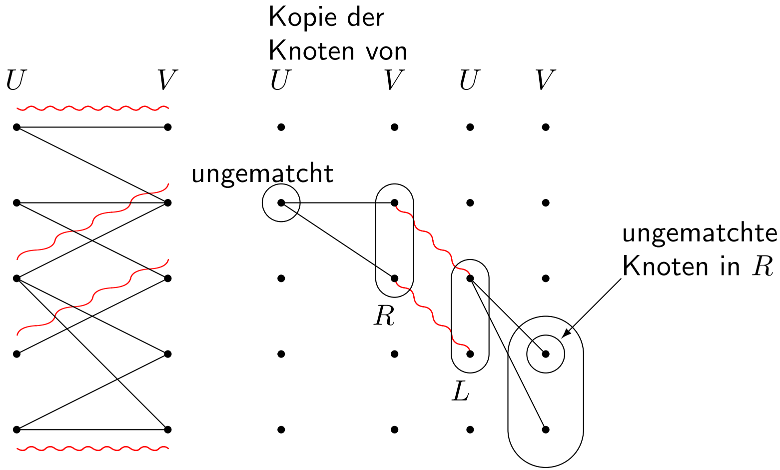
3. Maximum Matchings in bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, M ein Matching in G.

Zur Bestimmung der Länge eines kürzesten augmentierten Pfades bzgl. M führen wir eine simultane alternierende BFS durch, die von allen in M ungematchten Knoten in U aus startet.

for alle $v \in U \cup V$ **do** $label[v] := 0$ **od**
$R := \emptyset$; $l := 1$
for alle ungematchten Knoten $v \in U$ **do**
    for alle $\{v, w\} \in E$ **do** $label[w] := 1$; $R := R \cup \{w\}$ **od**
od
while $R \neq \emptyset$ **and** R enthält keinen ungematchten Knoten **do**
    $L := \emptyset$; $l{+}{+}$
    for $w \in R, \{v, w\} \in M$ **do** $L := L \cup \{v\}$; $label[v] := l$ **od**
    $R := \emptyset$; $l{+}{+}$
    for alle $v \in L, \{v, w\} \in E \setminus M$ **do**
        if $label[w] = 0$ **then**
            $R := R \cup \{w\}$; $label[w] := l$
        fi
    od
od
$R :=$ Menge der ungematchten Knoten in R




Kopie der
Knoten von
U
V
U
V
U
V
ungematcht
R
L
ungematchte
Knoten in R

Nachdem wir die Länge l eines kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M ermittelt haben, führen wir nacheinander von jedem ungematchten Knoten in U aus eine (zwischen ungematchten und gematchten Kanten) alternierende DFS bis zur Tiefe l aus, wobei wir

1. wenn wir einen ungematchten Knoten (in Tiefe l) erreichen, einen kürzesten augmentierenden Pfad Q_i gefunden haben; für den weiteren Verlauf der DFSs markieren wir Q_i als gelöscht;
2. jede Kante, über die die DFS zurücksetzt, ebenfalls als gelöscht markieren.

Der Zeitaufwand für diese DFSs beträgt $\mathcal{O}(n+m)$, da wir jede Kante höchstens zweimal (einmal in der DFS vorwärts, einmal rückwärts) besuchen.

Lemma 146

Gegeben die Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades, kann eine bzgl. „$\subseteq$“ maximale Menge kürzester augmentierender Pfade in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$ gefunden werden.

Satz 147

In bipartiten Graphen kann ein Matching maximaler Kardinalität in Zeit

$$\mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}}(n+m)\right)$$

gefunden werden.

Beweis:

Gemäß Korollar 145 genügen $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})$ Phasen, in denen jeweils mittels einer simultanen BFS und einer sequentiellen DFS (beide in Zeit $\mathcal{O}(n+m)$) eine maximale Menge kürzester augmentierender Pfade bestimmt wird. □

John Hopcroft, Richard Karp:
An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs
SIAM J. Comput. **2**(4), pp. 225–231 (1973)