Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Dazu setzen wir $C := A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Gemäß dieser Definition gilt, dass C und $A \cap B$ sowie C und B disjunkt sind. Deshalb können wir Eigenschaft 5 von Lemma 8 anwenden:

$$\Pr[A] = \Pr[C \cup (A \cap B)] = \Pr[C] + \Pr[A \cap B]\,.$$

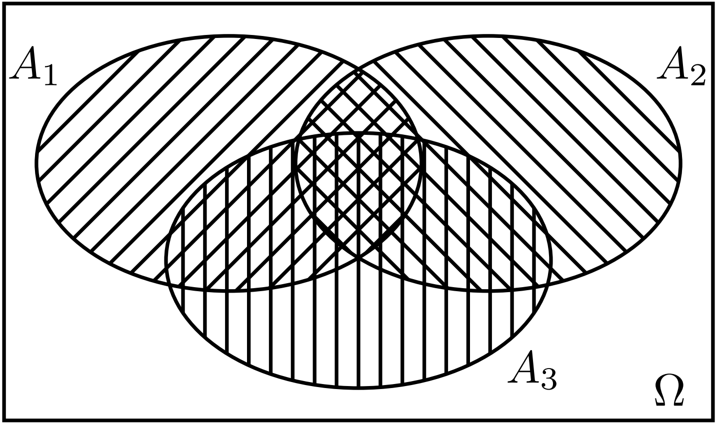
Wegen $A \cup B = C \cup B$ folgt daraus

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[C \cup B] = \Pr[C] + \Pr[B] = \\ \Pr[A] - \Pr[A \cap B] + \Pr[B]$$

und wir haben die Behauptung für $n = 2$ gezeigt.

Beweis (Forts.):

Der Fall $n = 3$:



Man beachte, dass durch die im Satz angegebene Summe jedes Flächenstück insgesamt genau einmal gezählt wird.

Beweis (Forts.):

Der allgemeine Fall kann nun durch Induktion über n gezeigt werden (was wir aber hier nicht ausführen!).

Satz 9 findet man manchmal auch unter der Bezeichung *Satz von Poincaré-Sylvester*, nach dem Franzosen

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

und dem Engländer

James Joseph Sylvester (1814–1897)

benannt.

Boolesche Ungleichung:

Die folgende Abschätzung ist nach George Boole (1815–1864) benannt:

Korollar 10

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ *gilt*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]\,.$$

Analog gilt für eine unendliche Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$, *dass*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]\,.$$

Beweis:

Zunächst betrachten wir die linke Seite der Ungleichung für den endlichen Fall und erhalten

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i} \Pr[\omega]\ .$$

Für die rechte Seite gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in A_i} \Pr[\omega]\ .$$

Jedes Elementarereignis kommt links also genau einmal und rechts mindestens einmal vor. $\square$

1.1 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Frage: Wie können Wahrscheinlichkeiten sinnvoll festgelegt werden?

Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)):
Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.
Also:

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

1.2 Historische Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die ersten Hinweise auf mathematische Untersuchungen zu Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich in einem Briefwechsel zwischen den französischen Mathematikern

Pierre Fermat (1601–1665)

und

Blaise Pascal (1623–1662).

Pascal beschäftigte sich neben der Mathematik auch mit Fragestellungen aus dem Bereich der Physik und auch aus der Informatik! Sein Vater hatte als Steuerinspektor in Rouen umfangreiche Rechnungen durchzuführen und so wurde Pascal zum Bau einer mechanischen Rechenmaschine, der so genannten *Pascaline*, motiviert.

In dem Briefwechsel taucht bereits der Ansatz $\Pr[E] = |E|/|\Omega|$ zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von E auf. Auch den Begriff des Erwartungswerts kann man dort schon finden. Weder Fermat noch Pascal publizierten ihre Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Niederländer

Christiaan Huygens (1629–1695)

entwickelte ebenfalls Methoden zum Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten aus. Er publizierte im Jahre 1657 auch eine kleine Arbeit mit dem Titel „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über die Gesetzmäßigkeiten beim Würfelspiel).

2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 11

A und B spielen Poker (52 Karten, 5 Karten pro Spieler, keine getauschten Karten).
A hält vier Asse und eine Herz Zwei in der Hand. B kann dieses Blatt nur überbieten, wenn er einen Straight Flush (fünf Karten *einer* Farbe in aufsteigender Reihenfolge hat. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
$F :=$ „B hat einen Straight Flush" beträgt

$$\Pr[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 8 + 7}{\binom{52-5}{5}} = \frac{31}{1533939} = 2{,}02.. \cdot 10^{-5}.$$

Beispiel 11 (Forts.)

A hat die Karten allerdings gezinkt und weiß, dass B nur Kreuz in der Hand hält. Bezeichne nun Ω' den Wahrscheinlichkeitsraum aller Möglichkeiten für B und F' das Ereignis, dass B einen Straight Flush der Farbe Kreuz hat:

$$\Pr[F'] = \frac{|F'|}{|\Omega'|} = \frac{8}{\binom{12}{5}} = \frac{8}{792} \approx 0{,}01 \;!!$$

Für $\Pr[A|B]$ erforderliche Eigenschaften:

1. $\Pr[B|B] = 1$;
2. $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$;
3. für festes B ist $\Pr[A|B]$ proportional zu $\Pr[A \cap B]$.

Definition 12

A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert als

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}\ .$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[\cdot|B]$ bilden für ein beliebiges Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[B] > 0$ einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über Ω.

Es ist leicht nachzurechnen, dass dadurch die Definition eines *diskreten Wahrscheinlichkeitsraums* erfüllt ist:

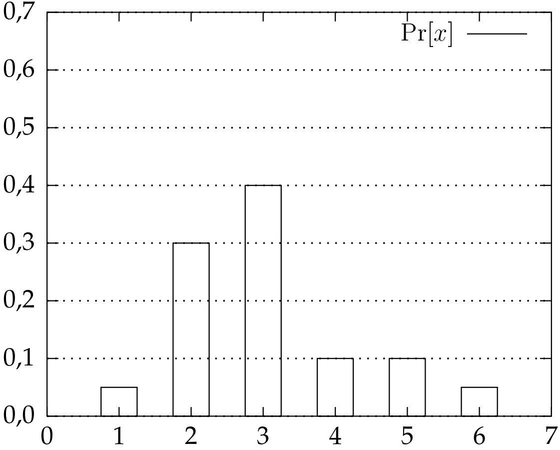
$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega|B] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\Pr[\omega \cap B]}{\Pr[B]} = \sum_{\omega \in B} \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = 1.$$

Damit gelten alle Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten auch für bedingte Wahrscheinlichkeiten. Beispielsweise:

$$\Pr[\emptyset|B] = 0 \text{ sowie } \Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B]\ .$$

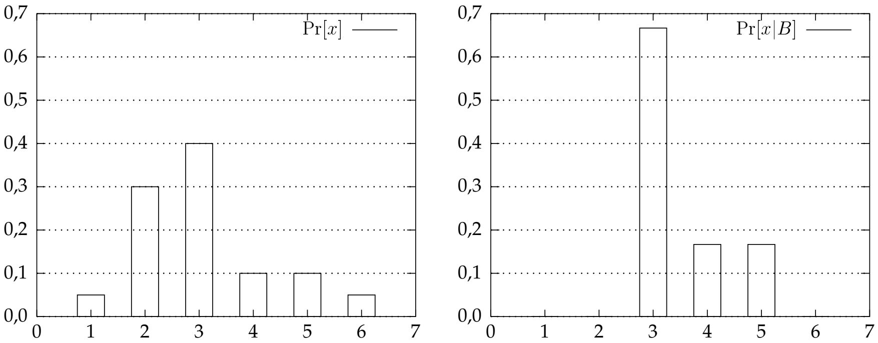
Beispiel 13 (Reskalierung bei bedingten Wahrscheinlichkeiten)

Betrachte folgenden gezinkten Würfel:



Beispiel 13 (Forts.)

Wir betrachten nun den durch $B := \{3, 4, 5\}$ gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeitsraum:



Was genau war die Bedingung?

Beispiel 14 (Zweikinderproblem)

Wir nehmen an, dass bei der Geburt eines Kindes beide Geschlechter gleich wahrscheinlich sind. Wir wissen, dass eine bestimmte Familie zwei Kinder hat und eines davon ein Mädchen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind?

Natürlich $\frac{1}{2}$.

Wirklich?

Beispiel 14 (Forts.)

Eigentlich gilt:

$$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$$

und

$$M := \{mm, mj, jm\} \ .$$

Wir bedingen auf M, und damit gilt für $A := \{mm\}$:

$$\Pr[A|M] = \frac{\Pr[A \cap M]}{\Pr[M]} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 15 (Ziegenproblem)

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten "Ich gebe Ihnen mal einen kleinen Hinweis" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine Ziege schaut heraus und meckert. Er fragt: "Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen sie Nummer zwei? "

Frage: Welche Strategie ist günstiger:

- S1 Der Spieler bleibt immer bei seiner ursprünglichen Wahl.
- S2 Der Spieler wechselt stets die ausgewählte Tür.

Beispiel (Forts.)

Wir betrachten hier eine Diskussion des Ziegenproblems mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wir betrachten bei jeder Variante den Fall, dass der Spieler

a) *die "richtige",*

b) *eine falsche Tür gewählt hat.*

Ersteres geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, *Letzteres mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{2}{3}$.
Wenn wir nun auf den Fall a) bzw. b) bedingen, ergeben sich für die beiden Strategien die folgenden bedingten Gewinnwahrscheinlichkeiten:

	S1	**S2**
a)	*1*	*0*
b)	*0*	*1*

Häufig verwendet man die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]\,. \tag{1}$$

Damit:

Satz 16 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ *gegeben. Falls* $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$ *ist, gilt*

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \\ \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \\ \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]\,.\end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da
$\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \ldots \geq \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0.$

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]}.$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$. $\square$

Beispiel 17 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulierung:
Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem: $n = 365$

Offensichtlich muss $m \leq n$ sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.
Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden. A_i bezeichne das Ereignis „Ball i landet in einem noch leeren Korb". Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb" bezeichnen wir mit A. Nach Satz 16 können wir $\Pr[A]$ berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr\left[\cap_{i=1}^{m} A_i\right] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_m| \cap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

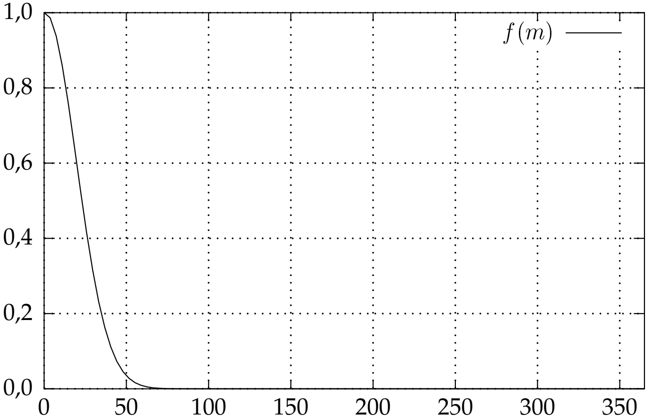
Unter der Bedingung, dass die ersten $j-1$ Bälle jeweils in einer leeren Urne gelandet sind, bedeutet A_j, dass der j-te Ball in eine der $n-(j-1)$ leeren Urnen fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n-(j-1)}{n} = 1 - \frac{j-1}{n}.$$

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ und wegen $\Pr[A_1] = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \\ &\leq \prod_{j=2}^{m} e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n)\cdot\sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m)\ .\end{aligned}$$



Verlauf von $f(m)$ für $n = 365$