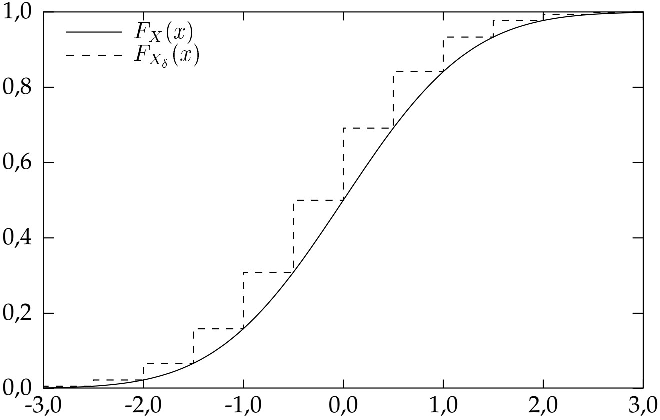
1.4.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable. Wir können aus X leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes $\delta > 0$ definieren

$$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[\text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Für X_δ gilt

$$\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta)\,.$$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an.

1.4.3 Erwartungswert und Varianz

Definition 95

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \,\mathrm{d}\, t,$$

sofern das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t) \,\mathrm{d}\, t$ endlich ist.

Für die Varianz gilt entsprechend

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t) \,\mathrm{d}\, t,$$

wenn $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ existiert.

Lemma 96

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$Y := g(X)\,.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nur für den einfachen Fall, dass g eine lineare Funktion ist, also $Y := a \cdot X + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t) \, \mathrm{d}\, t = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \, \mathrm{d}\, t.$$

Durch die Substitution $u := (t - b)/a$ mit $\mathrm{d}\, u = (1/a)\, \mathrm{d}\, t$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u) \, \mathrm{d}\, u.$$

□

Beispiel 97

Für Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung ergibt sich

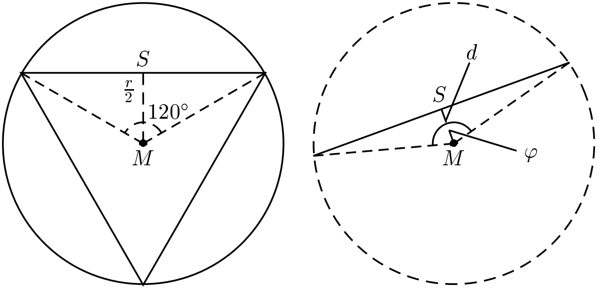
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t \cdot \mathrm{d}\, t \\
&= \frac{1}{2(b-a)} \cdot [t^2]_a^b \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 \cdot \mathrm{d}\, t = \frac{b^2+ba+a^2}{3}, \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \ldots = \frac{(a-b)^2}{12}\,.
\end{aligned}
$$

1.4.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

Bertrand'sches Paradoxon

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis A)?


S
r/2
120°
M
d
S
M
φ

Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

Siehe auch diese graphischen Darstellungen!

2. Wichtige stetige Verteilungen

2.1 Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}\,.$$

2.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung nimmt unter den stetigen Verteilungen eine besonders prominente Position ein.

Definition 98

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x; \mu, \sigma)$$

besitzt.

In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0, 1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x; 0, 1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, t =: \Phi(x; \mu, \sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).

Lemma 99

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}\, x = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis:

Wir berechnen zunächst I^2:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}\, x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \,\mathrm{d}\, y\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y\,. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen $x := r\cos\phi$ und $y := r\sin\phi$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

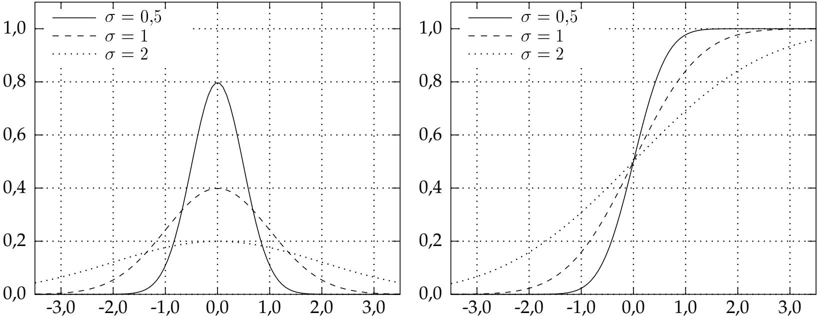
Beweis (Forts.):

und wir erhalten

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \phi \; = \; \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^{\infty} \mathrm{d}\, \phi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\, \phi \; = \; 2\pi.$$

$\square$



Dichte und Verteilung von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Satz 100 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, u.\end{aligned}$$

Nach der Substitution $u = (v - b)/a$ und $\mathrm{d}\, u = (1/a) \cdot \mathrm{d}\, v$ erhalten wir

Beweis (Forts.):

$$\Pr[Y \le y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, v\,.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog. $\square$

Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Dann ist nach Satz 100 Y $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\Pr[a < X \leq b] &= \Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) .\end{aligned}$$

Satz 101

X sei $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \textit{ und } \quad \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\, x.$$

Da der Integrand punktsymmetrisch zu $(0,0)$ ist, folgt $\mathbb{E}[X] = 0$.

Beweis (Forts.):

Mittels Lemma 99 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\,x \\ &= \underbrace{x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = 1$ ist und somit
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1.$ $\square$

Satz 102

X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \textit{ und } \mathrm{Var}[X] = \sigma^2\,.$$

Beweis:

$Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \cdot \mathrm{Var}[Y] = \sigma^2.$$

$\square$

2.3 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zur geometrischen Verteilung. Wie die geometrische Verteilung ist sie „gedächtnislos“. Sie spielt daher vor allem bei der Modellierung von Wartezeiten eine große Rolle.

Definition 103

Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ, $\lambda > 0$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Für die entsprechende Verteilungsfunktion gilt (für $x \geq 0$)

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}\, t = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Für $x < 0$ gilt selbstverständlich $F(x) = 0$.

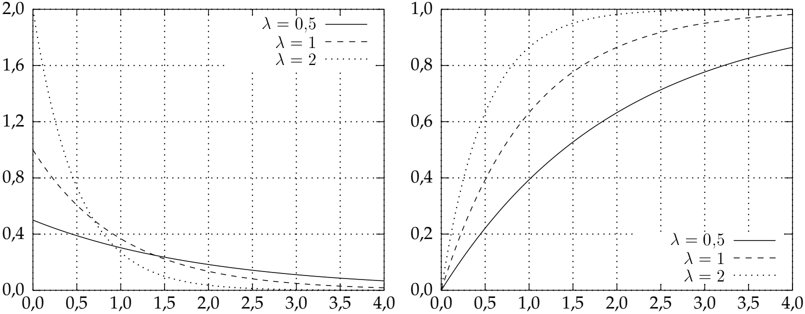
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}\, t \\
&= \left[t \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}\, t \\
&= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[t^2 \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$



Dichte und Verteilung der Exponentialverteilung