

Beweis:

Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \dots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\text{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem **Beispiel**)

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \dots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \dots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \text{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$,
und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \rightarrow e^{t^2/2} \text{ f\"ur } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Konvergenz der momenterzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Beweis (Forts.):

Die momenterzeugende Funktion existiert leider nicht bei allen Zufallsvariablen und unser Beweis ist deshalb unvollständig. Man umgeht dieses Problem, indem man statt der momenterzeugenden Funktion die so genannte **charakteristische Funktion** $\tilde{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ betrachtet. Für Details verweisen wir auf die einschlägige Literatur. □

Der Zentrale Grenzwertsatz hat die folgende intuitive Konsequenz:

Wenn eine Zufallsgröße durch lineare Kombination vieler unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen entsteht, so erhält man näherungsweise eine Normalverteilung.

Ein wichtiger Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes besteht darin, dass die auftretenden Zufallsgrößen Bernoulli-verteilt sind.

Korollar 117 (Grenzwertsatz von de Moivre)

X_1, \dots, X_n seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p . Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \dots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zentralen Grenzwertsatz, da $\mu = \frac{1}{n}\mathbb{E}[H_n] = p$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n}\text{Var}[H_n] = p(1 - p)$. □

Bemerkung

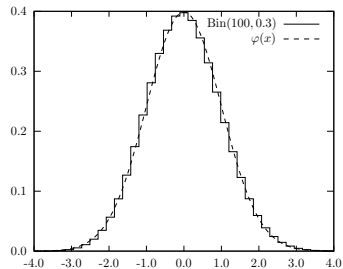
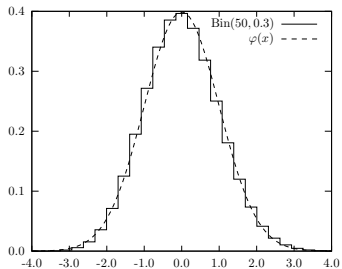
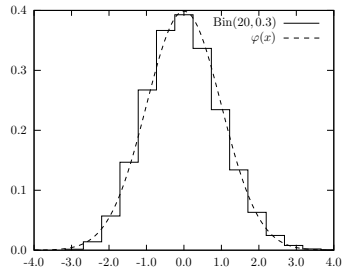
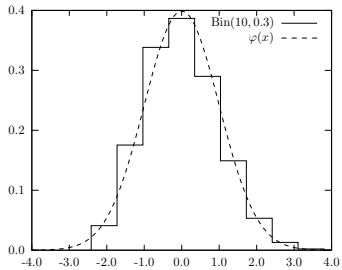
Wenn man X_1, \dots, X_n als Indikatorvariablen für das Eintreten eines Ereignisses A bei n unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes interpretiert, dann gibt H_n die absolute Häufigkeit von A an.

4.1 Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Korollar 117 ermöglicht, die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung aufzufassen. Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Korollar 117:

Korollar 118

Sei $H_n \sim \text{Bin}(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von H_n/n konvergiert gegen $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ für $n \rightarrow \infty$.



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

$\text{Bin}(n, 0.3)$ bei $0.3n$ zentriert, mit $\sqrt{0.3 \cdot 0.7n}$ horizontal gestaucht und vertikal gestreckt

Historisch gesehen entstand Korollar 117 vor Satz 116.

Für den Fall $p = 1/2$ wurde Korollar 117 bereits von Abraham de Moivre (1667–1754) bewiesen. De Moivre war gebürtiger Franzose, musste jedoch aufgrund seines protestantischen Glaubens nach England fliehen. Dort wurde er unter anderem Mitglied der Royal Society, erhielt jedoch niemals eine eigene Professur.

Die allgemeine Formulierung von Korollar 117 geht auf Pierre Simon Laplace (1749–1827) zurück. Allerdings vermutet man, dass die Lösung des allgemeinen Falls $p \neq 1/2$ bereits de Moivre bekannt war.