Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 14
30. Januar 2012

Diskrete Strukturen

Hinweis: Blatt 14 ist das letzte DS Übungsblatt in diesem Semester. Eine Abgabe der Hausaufgaben zur Korrektur ist nicht mehr vorgesehen.

Hausaufgabe 1

Gegeben sei eine positive reelle Zahl t, d. h. $0 < t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die folgende Rekursionsgleichung für Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$:

$$f_{n+3} + tf_{n+2} - t^2 f_{n+1} - t^3 f_n = 0\,, \quad \forall n \geq 0\,.$$

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung in geschlossener Form für f_n in Abhängigkeit geeigneter Parameter.
2. Sei nun $t = 1$. Es gelte $f_0 = 1$, $f_1 = 0$ und $f_2 = 2$.

   Bestimmen Sie Polynome $p(z)$ und $q(z)$, so dass für die erzeugende Funktion $F(z)$ der Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ die geschlossene Form $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ gilt.

Hausaufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass jeder (einfache) Graph mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ zusammenhängend ist. Wie viele Kanten besitzt jeder solche Graph?
2. Geben Sie 2 nicht isomorphe (einfache) Graphen an mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$. Begründung!
3. Zeigen Sie, dass es keinen bipartiten Graphen mit Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$ gibt.

Hausaufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Seien $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $E' \subseteq E$, $V' \subseteq V$ nichtleere Mengen. Dann ist $T = (V', E')$ ein Teilgraph von G.
2. Jeder (zusammenhängende oder unzusammenhängende) einfache Graph, dessen Knotenmenge V und Kantenmenge E die Gleichung $|V| = |E| + 1$ erfüllt, ist planar.
3. Der Baum mit Prüfer-Code $(5, 5, 5)$ besitzt die Gradfolge $(4, 1, 1, 1, 1)$.

Hausaufgabe 4

1. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{6,3\}, \{7,2\}, \{8,1\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.

2. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code $(2,3,4,3,4)$ dargestellt wird.

Hausaufgabe 5

Wir nennen einen einfachen, ungerichteten Graph mit mindestens 4 Knoten „fast-4-regulär", wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.
Wir betrachten im Folgenden einfache bipartite Graph $G = (A, B, E)$.
Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graphen G mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.

2. Es gibt einen nichtplanaren, fast-4-regulären bipartiten Graph G mit 12 Knoten.

3. Für alle $n \geq 1$ gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graph $G = (A, B, E)$ mit $|A| = |B| = 2n$.

   Führen Sie den Beweis durch Induktion über n. Der Induktionsschritt von n auf $n+1$ kann durch Zeichnung klargemacht werden.

Hausaufgabe 6

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten in den folgenden Graphen: K_6, $K_{3,4}$, P_4, C_5, $M_{3,2}$, $T_{3,3}$, Q_8.

2. Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph mehr als 10 Spannbäume besitzt.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Vorbereitung 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

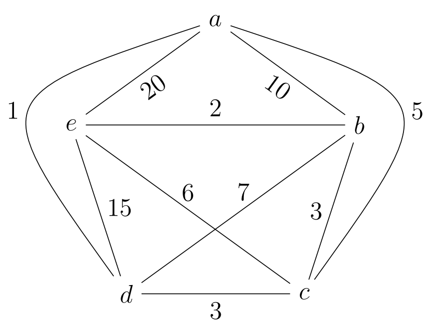
1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Vorbereitung 3

Sei $V = \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten einen vollständigen Graph $G = (V, E)$ mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung des Knotens a zu allen anderen 4 Knoten von G!
In welcher Reihenfolge werden die Entfernungen nach Dijkstra berechnet? Das heißt, in welcher Reihenfolge werden die Knoten aus F entfernt?
Protokollieren Sie Ihre Berechnungen geeignet!

Welcher Pfad verbindet den Knoten a mit Knoten e mit minimaler Gewichtesumme?

Erinnerung: In einem kantengewichteten Graph ist das Gewicht eines Weges die Summe seiner Kantengewichte. Die Entfernung zwischen zwei Knoten u und v ist dann das minimale Gewicht eines Weges zwischen u und v.

Tutoraufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie, u. a. mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.

2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass kein zusammenhängender bipartiter Graph B einen vollständigen Graph K_3 als Teilgraph enthält, d. h., dass jeder zusammenhängende bipartite Graph „dreiecksfrei“ ist.

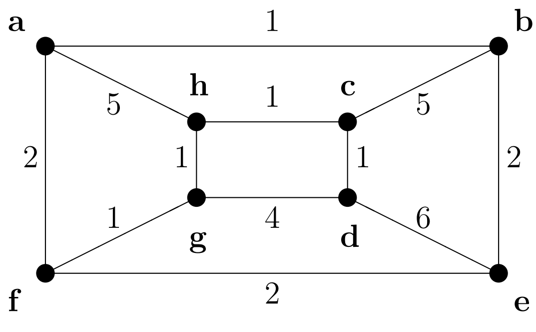
2. Geben Sie einen Spannbaum des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,5}$ an. Nummerieren Sie dabei die Knoten geeignet. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

3. Geben Sie einen planaren Teilgraph $B = (V, E)$ des $K_{3,5}$ mit $|V| = 8$ an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist. (Übersichtliche Zeichnung genügt).
$$|E| = 2|V| - 4\,.$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel (Anzahl der Gebiete ist gleich Anzahl der Kanten minus Anzahl der Knoten plus 2) für zusammenhängende bipartite planare Graphen $B = (V, E)$ die Ungleichung
$$|E| \leq 2|V| - 4\,.$$

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten den folgenden Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\mathrm{a, b, c, d, e, f, g, h}\}$, dessen Kanten mit ganzzahligen Längenangaben g gewichtet sind:



1. Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung $d(\mathrm{a}, \mathrm{d})$ zwischen den Knoten a und d!
Protokollieren Sie dabei die auftretenden Zwischenergebnisse durch Einträge in eine geeignete Tabelle, so dass Ihr Berechnungsweg sichtbar wird.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines minimalen Spannbaums von G. Protokollieren Sie Ihren Berechnungsweg.