WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

16. Oktober 2013

Ausgangslage

1. Die Vorlesung Diskrete Strukturen ist hier:

- Die **erste Mathematische Vorlesung** innerhalb einer
- **grundlegenden mathematischen Ausbildung**
- für **ingenieurwissenschaftliche Fächer**
- unter dem Dach der **Informatik**.

Dies hat weitreichende Konsequenzen für eine besondere Verantwortung, die in dieser Veranstaltung für den Erfolg der informatischen Studienrichtungen insgesamt zu übernehmen ist.

2. Die in der Vorlesung mehrheitlich anzutreffende Hörerschaft

- ist **vollgepackt** mit fragmentarischem „Mathe“ Wissen
- aus **Schulen, Vorkursen, Skripten, Internet**,
- erwartet in den folgenden Semestern eine kaum zu überblickende **Vielheit von „Mathematiken“** wie Differential- und Integralrechnung, Matrizenrechnung, Numerische Mathematik, analytische Geometrie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Logik usw.,
- hat **Zielvorstellungen** wie: Prüfungen bestehen, Abschlüsse machen, Karriere machen,
- fürchtet wegen angeblich mangelnder Begabung die angebliche **Schwierigkeit der Mathematik**
- und ist überzeugt, dass man Mathematik später nur in seltenen Anwendungsfällen als ein **Werkzeug** benötigt.

3. Unglaublich aber wahr ist die motivierende Tatsache,
dass die Hörerschaft mehrheitlich

- das mathematische Vorwissen zumindest im Detail getrost **vergessen** kann,
- genügend mathematische Begabung besitzt, um grundsätzlich 95% aller mathematischen Begriffsbildungen intuitiv zu **verstehen**,
- **logisch und abstrakt denken** kann,
- ohne nach Nützlichkeit zu fragen,
  Freude im Umgang mit mathematischen Gegenständen **erfahren** kann.

Häufiger Irrtum: ,,Mathematik lehrt logisches Denken"

Zutreffender ist: Informatik thematisiert die (vorhandenen) abstrakten geistigen Denkmechanismen.

Botschaft

Im Grundsatz

ist jeder Mensch mathematisch begabt,
kann jeder logisch denken, und es
kann jeder einen Algorithmus, d.h. die Vorschrift einer Ausführungsanweisung, ausführen.

Die Fähigkeit mathematisch zu denken,
ist eine menschliche Naturbegabung wie die Fähigkeit zu sprechen oder die Fähigkeit, ein Lied zu singen.

Entsprechend machen diese Tätigkeiten Freude.

Erfolgreich wird studieren, wer den Gegenstand des Studiums verstehen will und eine Begeisterung und Neugierde für diesen Gegenstand entwickelt.

Wahr ist aber auch:

Es gibt die intellektuelle Hürde, dass abstrakte Formen absolut „blutleer" sind, d.h. dass man gfs. formale Strukturen „beispielhaft" verkleiden muss, damit sie akzeptiert werden.

Die mathematische Abstraktion endet erst bei der Ästhetik reiner Formalismen.

Dies erfordert Gewöhnung.

Hilfreich ist der Vergleich mit der Musik.

Scheitern wird, wer lediglich andere Ziele bedient und den Gegenstand der Mathematik zum Werkzeug degradiert.

Konsequenzen für die Vermittlung mathematischer Inhalte, Zitat:

- Der Aufwand bei der Bewältigung einer Vielfalt von „Mathematiken" lässt sich dramatisch reduzieren, wenn von Anbeginn die Zusammenhänge über die Semester hinweg aufgezeigt werden.
  Der „Bogen des Verstehens"von der mathematischen Einführung bis zur Einführung in die Theoretische Informatik ist das Hauptmotiv der Ausbildung.
  Es gibt nur „eine" Mathematik.
- Die in der natürlichen Sprache angelegte intuitive Sprachkompetenz erlaubt es, mathematische Sachverhalte präzis zu thematisieren noch bevor die entsprechenden Begriffe formalisiert sind.

(Zitat aus „Vortrag für Tutoren der DS im WS 12/13",
W. Meixner, 11.10.2012, siehe Webseite der DS ZÜ 2013)

In medias res!

Lernstufe 1

Wir machen folgendes Experiment:

1. Der Dozent stellt sich jetzt ein Ding (Gegenstand) vor. OK?

2. Jeder im Hörsaal versuche herauszufinden,
welcher Gegenstand das ist! OK?

Bevor wir in einen Frage-Antwort-Dialog treten, untersuchen wir die logische Situation, in der jeder Einzelne von uns sich befindet.

Logische Analyse:

- Voraussetzung für einen Dialog ist, dass Sie in Ihrem Denkraum dem unbekannten Gegenstand einen logischen Ort zuordnen, auf den Sie sich im Dialog beziehen können.
- Es ist egal, ob Sie sich den Gegenstand konkret bebildern oder nicht. Entscheidend ist, dass Sie sich klar darüber sind, dass Sie diesem Gegenstand noch absolut keine Bestimmungseigenschaften zugewiesen haben.
- Sie haben damit einen logischen Gegenstand kreiert, der völlig unbestimmt ist, d.h.
  keine Bestimmungselemente oder Eigenschaften besitzt.

Ergebnis:

Sie haben einen unbestimmten Platzhalter (i.Z. $\perp$ oder $\bullet$) erzeugt.

Bevor wir durch Dialog klären, an welchen Gegenstand der Dozent denkt, **verändern** wir das Experiment wie folgt:

1. Der Dozent fügt jetzt dem Rätsel ein weiteres Ding hinzu. OK?

2. Jeder im Hörsaal versuche herauszufinden,
wie viele Gegenstände nun zu erraten sind! OK?

Ergebnis:

Trivial beantwortbar!

Selbst ohne Kenntnis der Eigenschaften von Dingen können wir dieselben zählen.

Vorgriff: Das Zählen setzt nicht die klassische Mengenlehre voraus. Die Diskussion dieser Aussage stellen wir einstweilen zurück.

Wir brechen das Experiment ab und betrachten nun nach Cantor die Strukturbildende Denkleistung

Zusammenfassung.

Beispielsweise erzeugen wir Exemplare von unbestimmten Platzhaltern, und fassen ein bzw. zwei bzw. drei davon zu neuen Strukturen $\langle \bullet \rangle$, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ und $\langle \bullet, \bullet, \bullet \rangle$ zusammen.

Beispiel 1:

$$\underbrace{\bullet \quad \bullet}_{\mathbf{2}} \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{\mathbf{3}} \quad \underbrace{\bullet}_{\mathbf{1}} \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{\mathbf{2}} \quad \underbrace{\bullet}_{\mathbf{1}} \quad \underbrace{\bullet}_{\mathbf{1}}$$

Wir erhalten also neue Dinge oder Objekte von unterschiedlicher Struktur, a.a. wir erhalten die folgenden Strukturen:

3 Exemplare der Struktur **1**: $\langle \bullet \rangle$,

2 Exemplare der Struktur **2**: $\langle \bullet, \bullet \rangle$,

1 Exemplar der Struktur **3**: $\langle \bullet, \bullet, \bullet \rangle$.

Man beachte, dass Strukturen Eigenschaften haben, die sich aus deren Erzeugung ableiten, und dass man die Strukturexemplare auf Gleichheit überprüfen kann.

Durch wiederholte Zusammenfassung erhält man unbegrenzt weitere Strukturen. Stets ist die Aufschreibung einer Struktur eine $\langle , \rangle$- geklammerte Liste mit Komma als Trennzeichen.

Beispiel 2:

$$\langle 3, \langle 2, 2, 1\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2, \langle 3\rangle\rangle, \langle 2, 2, 1\rangle\rangle \, .$$

Die Reihenfolge der Nennung der Listenelemente ist hier nur eine Eigenschaft der Aufschreibung und nicht eine Eigenschaft der Struktur selbst.

Es gilt z.B.: $\langle 2, 2, 1\rangle = \langle 2, 1, 2\rangle$.

Definition:

Die Zusammenfassung von Objekten $a, b, \ldots$ zu einer Struktur $\langle a, b, \ldots \rangle$ nennt man Multimenge.

Man sagt: $\langle a, b, \ldots \rangle$ ist eine Multimenge mit den Strukturexemplaren $a, b, \ldots$.

Anwendung:

- Beispiel 1 zeigt die 6-elementige Multimenge $\langle 2, 3, 1, 2, 1, 1 \rangle$. Die Aufschreibung $\langle 1, 1, 1, 2, 2, 3 \rangle$ bezeichnet die gleiche Multimenge.
- Beispiel 2 zeigt die 5-elementige Multimenge $\langle 3, \langle 1 \rangle, \langle 2, \langle 3 \rangle \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle \rangle$.

Nun gibt es eine weitere bedeutende logische Denkleistung, die es erlaubt, eine weitere Art der Zusammenfassung von Strukturen zu etablieren.

Dies ist die Zusammenfassung mit Unterscheidung der

Reihenfolge der Erzeugung von Objekten

Wenn wir die Reihenfolge der Erzeugung von Objekten beachten, dann haben wir beispielsweise in Beispiel 2 folgendes

Tupel erzeugt:

$$\Big(3, \langle 2,2,1\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2, \langle 3\rangle\rangle, \langle 2,2,1\rangle\Big)\ .$$

Beispiel 3:

$$(\,\bullet, \langle \bullet, \bullet\rangle, \langle \bullet, \bullet\rangle, \bullet, \langle \bullet, \bullet, \bullet\,\rangle)$$

Feststellung 1:

Jede Komponente des letztgenannten Tupels repräsentiert eine bestimmte Struktur.

Die Menge der <u>unterschiedlichen</u> Strukturen des Tupels wird notiert als

$$\{\bullet, \langle\bullet,\bullet\rangle, \langle\bullet,\bullet\rangle, \bullet, \langle\bullet,\bullet,\bullet\rangle\}$$

Diese Menge enthält genau 3 Elemente: $\bullet$, $\langle\bullet,\bullet\rangle$ und $\langle\bullet,\bullet,\bullet\rangle$.

Die Reihenfolge und Vielfachheit der Exemplare in der Aufschreibung ist unbedeutend.

Feststellung 2:

Falls die Vielfachheit der Exemplare der Strukturen genannt werden soll, dann notiert man die Multimenge des Tupels als

$$\langle \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle, \langle \bullet, \bullet \rangle, \bullet, \langle \bullet, \bullet, \bullet \rangle \rangle$$

Die Reihenfolge der Exemplare in der Aufschreibung ist unbedeutend.

Diese Multimenge enthält genau 5 Elemente:

$$\text{2mal } \bullet,\ \text{2mal } \langle \bullet, \bullet \rangle \text{ und 1mal } \langle \bullet, \bullet, \bullet \rangle\ .$$

Selbstverständlich sind obige Feststellungen noch keine präzise Definition.

Allerdings sollte intuitiv klar sein, welche Definitionen nun zu erwarten sind.

Weitere Beispiele folgen.

Beispiel:

Gegeben sei das Wort „$Strukturen$“, das wir mit w bezeichnen wollen, d.h., sei $w = Strukturen$.

Das Wort w ist nichts anderes als das Tupel $(s, t, r, u, k, t, u, r, e, n)$.

Wir betrachten die „Vorkommen“ von Buchstaben in w.

Multimenge der Vorkommen von Buchstaben in w:
$\langle s, t, t, r, r, u, u, k, e, n \rangle$.
Es gilt z.B. $\langle s, t, t, r, r, u, u, k, e, n \rangle = \langle s, r, r, u, k, u, e, n, t, t \rangle$.

Multimenge der Vorkommen von u in w: $\langle u, u \rangle$.

Menge der Vorkommen von Buchstaben in w:
$\{s, t, r, u, k, e, n\}$.
Es gilt z.B. $\{s, t, r, u, k, e, n\} = \{s, s, t, r, r, u, k, e, n\}$

Wir lernen:

Wir müssen immer zwischen der Benennung oder Aufschreibung eines Objektes (Syntax)
und dem Objekt selbst (Semantik)
unterscheiden.

Selbstreflexion:

Die logische Fähigkeit, zwischen Syntax und Semantik zu unterscheiden, ist ein Ergebnis der menschlichen Fähigkeit, sich selbst bzw. die eigene Produktion bei einer Kommunikation zu beobachten.

Beobachtung:

Wir beobachten, wie wir Strukturen produzieren
und sind fähig, diesen Produktionsprozess insgesamt zu beurteilen.

Wir verfahren offenbar nach Regeln, die wir wiederholt anwenden können und sind in der Lage, alles was auf diese Weise produzierbar ist, als eine Gesamtheit zu begreifen.

Ergebnis:

Wir sehen also eine neue Art der Zusammenfassung und nennen diese Zusammenfassung

die Menge aller Objekte, die durch wiederholte Anwendung der wohldefinierten Regeln erzeugbar sind.

Während wir bisher nur endliche Strukturen erzeugt haben, entsteht durch Zusammenfassung aller erzeugbaren Objekte eine unendliche Struktur.

Wir werden später sehen, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ein Beispiel einer solchen Zusammenfassung ist.

Der allgemeine Begriff der Zusammenfassung wurde von Cantor zur Präzisierung des Begriffs der Mengen verwendet.

Faktum: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 (St. Petersburg) - 1918 (Halle a.d.Saale), deutscher Mathematiker, Erfinder der Mengenlehre.

Die wichtigsten Instrumente der Mathematik sind, aufbauend auf der Mengenlehre, die Zahlen:

- $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen
- $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$: reelle Zahlen
- $\mathbb{C}$: komplexe Zahlen

Wir werden in der Zentralübung insbesondere mit dem ersten Arbeitsblatt darauf zurückkommen.

Zunächst aber wollen wir die übergreifenden Aufgaben der Zentralübung beschreiben.

Schlüssel zum Erfolg

Mathematik

Didaktik

Schlüssel zum Erfolg

Konzentration

Eigenständigkeit

Privatheit

Austausch

Schlüssel zum Erfolg

- **Konzentration**
- **Eigenständigkeit**
- **Privatheit**
- **Austausch**

Mathematik

- kein Lehrgang zur Erlernung des logischen Denkens
- kein Werkzeugkasten zur Lösung von Anwendungsproblemen
- Naturwissenschaft der abstrakten Strukturen und des abstrakten Denkens
- faszinierender Gegenstand des Wissens

Didaktik

- auf natürliche Sprachkompetenz bauen
- Gegenstand aus mehreren Richtungen betrachten
- Dialektik Theorie und Beispiel beachten
- Brückenschlag zwischen Vorlesungen

ZÜ I

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Ziele der Zentralübung
3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen
4. Metasprachliche Konzepte
5. Tipps zu den Übungsblättern.

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Mi 17.45–19:15 Ort: MW 0001
- Webseite:
  http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/
- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie

1.2 Persönliche Kommunikation

- Rückkopplung:
  Dr. W. Meixner,
  Epost: meixner@in.tum.de,
  Büro: MI 03.09.040,
  Sprechstunde: nach Zentralübung und n.V.
- Kummerkasten: Epost

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und allgemeine didaktische Ziele.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor-, Haus- bzw. Prüfungsaufgaben der Übungsblätter bzw. Mittelklausur.
- **Persönliche Kommunikation**:
  - Rückkopplung zu Übungsleitung und Tutoren
  - Antworten auf Kummerkasten: Briefkästen und Epost

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Vertiefung der informellen **Metasprache**

3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen

3.1

Mathematisch–Theoretische Informatik in den ersten 4 Semestern:

• Diskrete Strukturen	(DS)
• Informatik 1	(Info1)
• Lineare Algebra	(LA)
• Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen	(GAD)
• Analysis	(A)
• Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie	(DWT)
• Theoretische Informatik	(Theo)

3.2

Spezielle Beziehungen von **DS** zu

- **Info1:** Algorithmenbegriff, Beweisverfahren, Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Mengenlehre, Bäume, Rekursion und Induktion.
- **LA:** Matrizen, Matrixpotenzen, Vektorräume, Algebren, Körpertheorie.
- **GAD:** Bäume, Graphen, Zählverfahren, Landau Symbole.
- **A:** Reelle und komplexe Zahlen, Grenzwerte, Potenzreihen, Polynome.
- **DWT:** Zählmaße und Zählprobleme, Kombinatorik.
- **Theo:** Graphentheorie, Eigenschaften von Algorithmen, Rekursionstheorie, Komplexitätstheorie.

4. Grundlegende Metasprachliche Begriffe

4.1 Basisbegriffe der Informatik

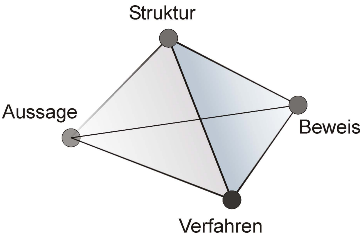
Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Tetraeder der Basisbegriffe



Informelle Präzisierung:

- Struktur: (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) Objekten.
- Verfahren: (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) Vorgängen.

- Aussage: Sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu sagen, dass es wahr oder falsch ist. (*Aristoteles*)
- Beweis: Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage.

Die Begriffe 'Objekt' und 'Vorgang' bedingen sich gegenseitig wie folgt:

- Jeder (logische) Vorgang führt zu einem (logischen) Objekt als Ergebnis.
- Umgekehrt ist jedes (logische) Objekt das Ergebnis eines (logischen) Vorgangs.

Fundamentalsatz

„In der mathematisch–theoretischen Informatik ist das logische Konzept des 'Vorgangs' gleichberechtigt zum logischen Konzept des 'Objekts': sie bedingen sich gegenseitig.“

(*Meixner, 2003*)

Daraus folgt:

„Die mathematisch–theoretische Informatik kann nicht wie die Mathematik allein auf der Mengenlehre aufgebaut werden.“

Damit erhalten Verfahren oder Algorithmen ihre Bedeutung.

Bemerkung:

In natürlichen Sprachen gibt es zweideutige (bivalente) Begriffe, die sowohl als Begriff für Objekte als auch als Begriff für Vorgänge gedeutet werden können. Beispiel: 'Zusammenfassung'.

Das Wort 'Zusammenfassung' kann sowohl den Vorgang des Zusammenfassens als auch das 'objektive' Ergebnis dieses Vorgangs bedeuten.

Diese Zweideutigkeit ermöglicht eine Vertauschung einer operationellen gegen eine beschreibende Interpretation.

Die gegenseitige Bedingtheit der Begriffe „Objekt“ und „Vorgang“ begründet fundamentale Dualitätsbeziehungen in der Informatik.

Dies kann erst am Ende des Semesters diskutiert werden mit Rückgriff sowohl auf die Ergebnisse von DS als auch von Info1.

$\perp$

Das *total unbestimmte Objekt* ist der Inbegriff eines namenlosen, gedanklich erzeugten, logischen Platzhalters, der „logischen Stelle“, die frei von jeder inhaltlichen Bestimmung ist und als zählbares „Exemplar“ „mehrfach“ auftreten bzw. erzeugt werden kann. Das total unbestimmte Objekt ist der Begriff eines „Vorgangs“ schlechthin und ihm ist keine Bestimmung zugeordnet. Man kann auch sagen, dass ihm nur die leere Bestimmung zugeordnet ist.

(Meixner, 2007)

Wir bezeichnen total unbestimmte Objekte mit

$\perp$ (gesprochen „Boden“ oder „bottom“).

$\top$

Der Gegenbegriff (begriffliche Antithese) zum total unbestimmten Objekt ist das *total bestimmte Objekt* oder (mathematische) *Universum*. Das Universum ist definiert als der Inbegriff des bestimmten Objekts, das nicht konstruiert werden kann, sondern a priori vorhanden ist. Es bedeutet den „logischen Raum“, in dem alle konstruierten, mathematischen Objekte gedacht werden.

(Meixner, 2007)

Wir bezeichnen es mit

$$\top \quad \text{(gesprochen „Topp“).}$$

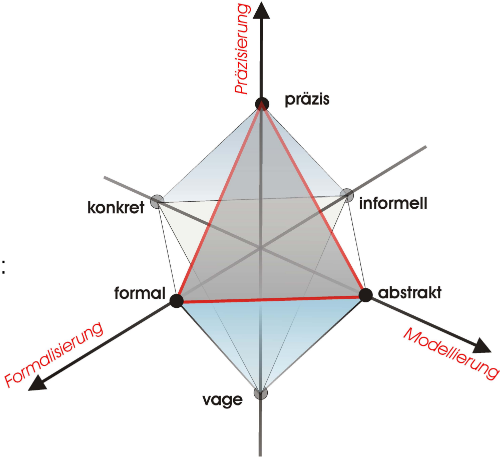
Wir können $\perp$ bzw. $\top$ auch als *initiales* bzw. *finales* Objekt bezeichnen.

4.2 Vertiefung der informellen Metasprache

Wissenschaftliche Schulung und Entwicklung
vollzieht sich im Spannungsfeld folgender Begriffspaare:

- vage — präzis
- konkret — abstrakt
- informell — formal

Darstellung im Oktaeder:



- *Durch „Abstraktion“ „erzeugen“ wir abstrakte (= von uns gedachte) Inhalte (Objekte, Vorgänge), die* **nicht identisch** *sind mit dem „konkret Gemeinten“!*

  (Modellierung)

- *Wir formalisieren abstrakte Inhalte, indem wir sie durch konkrete Zeichen(folgen) „benennen“.*

  (Formalisierung)

- *Wir präzisieren abstrakte Inhalte, indem wir logische Konsequenzen mit dem Gemeinten vergleichen, und dann die Modellierung adäquat ändern.*

  (Präzisierung)

Abstraktionen versus Phantasien:

„Wer über einen gedachten Stein stolpert und sich dabei den Arm bricht, der hat ein Problem mit der

Wahrnehmung der Wirklichkeit."