WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

23. Oktober 2013

ZÜ II

Übersicht:

1. Vorstellung der ZÜ
2. Thema: Zahlen und Äquivalenzrelationen
3. Hasse-Diagramm, Venn-Diagramm

1. Vorstellung der ZÜ

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Mi 17.45–19:15 Ort: MW 0001
- Webseite:
  http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/
- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung

1.2 Konzept der Zentralübung

Die Zentralübung ist als drittes Standbein der DS Veranstaltung konzipiert mit dem übergeordneten didaktischen Schwerpunkt, für Teilnehmer aus den Ingenieurwissenschaften ein intuitives mathematisches Gesamtverständis zu erreichen. Sie vermittelt eine dritte Sicht auf den selben Gegenstand der Veranstaltung.

Die Einrichtung einer zusätzlichen Veranstaltung als Zentralübung folgt einem erweiterten didaktischen Modell von grundsätzlicher Bedeutung hinsichtlich der mathematischen Ausbildung für Ingenieurwissenschaften.

Es gibt spezielle und allgemeine didaktische Ziele wie folgt.

Spezielle Ziele:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor-, Haus- bzw. Prüfungsaufgaben der Übungsblätter bzw. Mittelklausur.
- **Persönliche Kommunikation mit Dozent**:
  - Rückkopplung bzw. Diskussion
  - Antworten auf Kummerkasten: Briefkästen und Epost

Allgemeine Ziele:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Vertiefung der informellen **Metasprache** auf der Grundlage der natürlichen Sprachkompentenz.

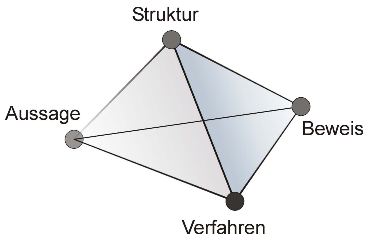
1.3 Grundlegende Metasprachliche Begriffe

1.3.1 Basisbegriffe der Informatik

Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Tetraeder der Basisbegriffe



Informelle Präzisierung:

- Struktur: (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) Objekten.
- Verfahren: (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) Vorgängen.

- Aussage: Sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu sagen, dass es wahr oder falsch ist. (*Aristoteles*)
- Beweis: Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage.

2. Thema: Zahlen und Äquivalenzrelationen

Die Konstruktion von Zahlen benutzt Äquivalenzrelationen.

Wir demonstrieren dies am Beispiel der ganzen Zahlen.

2.1 Ganze Zahlen

Eine der einfachsten Strukturen ist die natürliche Zahl 1, wie wir sie exemplarisch eingeführt haben.

Wir kennen Regeln, wie man durch Erweiterung aus jeder natürlichen Zahl n eine ,,nächst größere“ natürliche Zahl n' erhalten kann.

Die Mengen-Zusammenfassung aller Zahlen, die wir durch Anwendung dieser Regeln erhalten können, nannten wir Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Wir benötigen einen erweiterten Zahlenbereich,
wie die folgenden Überlegungen zeigen!

Vermögen kann man zählen.

Es kann beliebig größer werden, es kann aber auch beliebig kleiner werden, denn es gibt die Möglichkeit von Schulden.

Die natürlichen Zahlen reichen nicht aus, um dies darzustellen.

Die ganzen Zahlen sind nun die abstraktest möglichen Rechengrößen, die es uns gestatten,
sowohl beliebiges Wachstum von Vermögen zu beschreiben,
als auch beliebig „Schulden zu machen“ und daraus auch wieder geordnet heraus zu kommen, indem man Vermögen erneut hinzufügt.

Man könnte sagen, dass ganze Zahlen
die Abstraktion des Begriffs des „virtuellen“ Vermögens sind.

Wir konstruieren nun die ganzen Zahlen ähnlich, wie es Buchhalter tun könnten. Wir nehmen an, dass Buchhalter nur mit natürlichen Zahlen umgehen können.

Wir verwenden dazu ein Paar natürlicher Zahlen (m, n).

Die erste Komponente notiert den Wert des Geldes in der Kasse, die zweite Komponente notiert die Summe der Verbindlichkeiten (zu zahlende Rechnungen).

Das dargestellte (virtuelle) Vermögen ist gegeben durch den

$$\text{Saldo } m - n.$$

Wir bemerken allerdings, dass die Subtraktion hier nicht immer definiert ist. Dieses Problem wird erst in der Struktur der ganzen Zahlen gelöst.

Ein Buchhalter benötigt nicht unbedingt die Subtraktion.

Rechenstruktur:

Der Buchhalter notiert die Eingänge von Geld oder Verbindlichkeiten,
gelegentlich streicht er gleiche Beträge auf beiden Kontoseiten, wenn eine Verbindlichkeit bezahlt wurde.

Würde der Buchhalter ganze Zahlen anstelle von natürlichen Zahlen verwenden, dann wäre der Saldo nach jeder Buchung ablesbar.

Der Buchhalter kann ein und dasselbe Vermögen durch verschiedene Zahlenpaare (m_1, n_1) oder (m_2, n_2) darstellen. Paare (m_1, n_1) und (m_2, n_2) stellen das gleiche Vermögen dar, wenn die Salden gleich sind, d. h. wenn gilt:

$$„m_1 - n_1 = m_2 - n_2\text{“.}$$

Feststellung:
Ein Saldowert bzw. eine ganze Zahl steht jeweils für eine Äquivalenzklasse aller Paare (m, n), die paarweise den „gleichen Saldowert“ haben, d.h. eben äquivalent sind.

Konstruktion der ganzen Zahlen:

Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und definieren auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation $\equiv$ wie folgt:

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) \equiv (m_2, n_2) \quad &:\Longleftrightarrow \quad (m_1+n_2, n_1+n_2) = (m_2+n_1, n_1+n_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad m_1+n_2 = m_2+n_1\,.\end{aligned}$$

Nun definieren wir die Menge der ganzen Zahlen als die Menge der Äquivalenzklassen $[x]_\equiv$ mit $x \in \mathbb{N}^2$.

Interessant sind die Äquivalenzklassen

$$[(1,1)]_\equiv \quad \text{bzw.} \quad [(2,1)]_\equiv \quad \text{bzw.} \quad [(1,2)]_\equiv\,.$$

Wir bezeichnen sie mit

$$0 \quad \text{bzw.} \quad 1 \quad \text{bzw.} \quad -1\,.$$

Abstrahieren wir von Darstellungen, dann kommen wir zur algebraischen Struktur der ganzen Zahlen, die nur durch Rechengesetze beschrieben wird.

Bemerkung:

Äquivalenzrelationen sind bedeutende Strukturen zur Konstruktion neuer mathematischer Objekte, wie z.B. den ganzen Zahlen.

Auch die rationalen Zahlen, die reellen und die komplexen Zahlen werden mit Hilfe von Äquivalenzrelationen definiert.

2.2 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation:

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Äquivalenzklasse $[x]_R$ einer Äquivalenzrelation R
mit Repräsentant x:

Die Menge A aller y, die in Relation $(y, x) \in R$ sind, i.Z. $A = [x]_R$.

Partition:

Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation

$=$

„Überdeckung einer Menge durch eine Menge von disjunkten Mengen (Partition)“

Charakterisierung:

Jede Partition definiert eindeutig eine Äquivalenzrelation,
und umgekehrt,
jede Äquivalenzrelation definiert eindeutig eine Partition.

Diese Charakterisierung ist für die Konstruktion von Beispielen von Äquivalenzrelationen von Bedeutung.

Beispiele graphischer Darstellungen endlicher Partitionen bzw. Äquivalenzrelationen siehe Tafel.

3. Hasse-Diagramm, Venn-Diagramm

3.1 Hasse-Diagramm

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche $\leq$-Ordnung der Zahlen $[5]$.

   Wie ergibt sich die $\leq$-Ordnung auf $[5]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?

Erklärung:

Ein **Hasse-Diagramm** ist eine graphische Darstellung einer transitiven und reflexiven, binären Relation R.

Paare (a, b) werden als Pfeile
oder z. B. als Kanten von oben nach unten
zwischen Punkten a und b dargestellt.

Dabei ist das wichtigste darstellerische Prinzip,
dass all Jenes nicht gezeichnet wird,
was sich durch die Eigenschaften der Transitivität und Reflexivität der darzustellenden Relation von selbst versteht.

Abstrakt betrachtet ist aber das Hasse-Diagramm selbst wieder eine Relation H, die in einem definierten Verhältnis zu R steht.

In der Literatur werden meist nur Ordnungsrelationen mit Hasse-Diagrammen dargestellt.

Zurück zur eingangs gestellten Frage!

Antwort:

- Für ein Hasse-Diagramm H einer transitiven und reflexiven Relation R gilt stets $H \subseteq R$.
  Die reflexive und transitive Hülle von H ist gleich R.
- H ist stets minimal in dem folgenden Sinn:
  H enthält keine reflexiven Pfeile (x, x) und nur solche Pfeile $(x, y) \in R$, die sich nicht aus der transitiven Verkettung von Pfeilen $(x, z) \in H$ und $(z, y) \in H$ ergeben.
- Für das (abstrakte) Hasse-Diagramm H der geordneten Menge $[5]$ gilt damit

$$H = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}\,.$$

(Zeichnung)

R ergibt sich dann aus H als reflexive und transitive Hülle.

2. Wir entfernen aus der Relation $\leq$ auf $[5]$ das Paar $(1, 2)$.
Zeigen Sie, dass die resultierende Relation $\leq'$ transitiv und reflexiv ist.
Geben Sie das Hasse-Diagramm für $\leq'$ an.

Beweise siehe Tafel.

2. Wir definieren auf $[5]$ eine Relation R, so dass $(x, y) \in R$ für alle $x, y \in [5]$ gilt.
   Ist R eine Äquivalenzrelation? Beweis!
   Welche Partition ist R zugeordnet?
   Gibt es ein Hasse-Diagramm für R? Beweis!

Antwort: R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Reflexivität: für alle $x \in [5]$ muss $(x, x) \in R$ gelten. Klar nach Def.

Transitivität und Symmetrie analog.

Die Partition besteht aus einem einzigen Element, welches gleich der einzigen Äquivalenzklasse von R ist.

Für R gibt es ein Hasse-Diagramm, siehe Tafel.

Bemerkung: Nicht für jede transitive und reflexive Relation gibt es ein Hasse-Diagramm. Beispiel?

3.2 Venn-Diagramme

Um die allgemeine Gültigkeit von Mengengleichungen in 3 Variablen A, B, C zu beweisen oder zu widerlegen, reicht es, dies in einem Venn-Diagramm für die Mengen

$A = \{a, ab, ac, abc\}$, $B = \{b, ab, bc, abc\}$, $C = \{c, bc, ac, abc\}$ über dem Universum $U = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc, d\}$ zu tun.

In den Ausdrücken innerhalb der Mengengleichung dürfen die „üblichen" Mengenoperationen vorkommen einschließlich der Komplementbildung.

Wir wollen dieses Venn-Diagramm als Allgemeines Venn-Diagramm für 3 Variablen A, B, C bezeichnen.

Anwendungsbeispiel:

1. Widerlegen Sie mit Hilfe des allgemeinen Venn-Diagramms die Gültigkeit der Mengengleichung

$$A \cup (B \cap C) = A$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&A \cup (B \cap C) \\
&\qquad = \{a, ab, ac, abc\} \cup (\{b, ab, bc, abc\} \cap \{c, bc, ac, abc\}) \\
&\qquad = \{a, ab, ac, abc\} \cup \{bc, abc\} \\
&\qquad = \{a, ab, ac, abc, bc\} \\
&\qquad \neq \{a, ab, ac, abc\} \\
&\qquad = A\,.
\end{aligned}
$$

Die Methode des allgemeinen Venn-Diagramms liefert bei der Widerlegung einer Gleichung automatisch ein Gegenbeispiel!

Nächste Aufgabe:

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C einerseits und andererseits
der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen p, q, r ?

Antwort:

Allgemeine Venn-Diagramme dreier Mengen A, B und C
stellen schematisch zunächst
alle möglichen Durchschnitte dieser drei Mengen dar.

Zeichnerische Darstellungsmittel sind z. B. Kreise oder Quadrate.

Bei Zeichnung eines Kreises (oder Quadtrats) gibt es grundsätzlich die Möglichkeit,

den Innenbereich und den Außenbereich

als Darstellung je einer Menge aufzufassen.

Mit drei Kreisen für A bzw. B bzw. C
kann man also deren Komplemente $\overline{A}$ bzw. $\overline{B}$ bzw. $\overline{C}$ darstellen,

und mithin alle Durchschnitte der 6 Mengen A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Die leere Menge wird als Außenbereich des Universums, d. h. der gesamten Zeichnungsebene, aufgefaßt.

Das Universum kann durch den Durchschnitt von 0 Mengen als Grenzfall des Durchschnitts von n Mengen dargestellt werden.

Frage:

Wie viele verschiedene Durchschnitte können dargestellt werden?

Einen Zusammenhang des Venn-Diagramms mit den Vollkonjunktionen über p, q und r kann man herstellen, indem man z. B. eine Zuordnung

$$p \mapsto A,\ q \mapsto B \text{ und } r \mapsto C$$

definiert und die

Konjunktion als Mengendurchschnitt

sowie die

Negation als Komplementbildung

interpretiert.

Dann entspricht jeder Vollkonjunktion über p, q und r genau eines der kleinsten, nicht weiter unterteilten Gebiete im Venn-Diagramm.

Dies sind jene Gebiete, die alle zusammen eine

Partitionierung des Universums

darstellen, d. h.
eine Aufteilung des Universums in disjunkte (Teil-)Mengen.

Bemerkung:

Es stellt sich die interessante weitergehende Frage, welche Aussage man den Aussagenvariablen, z. B. p, zuordnen könnte anstelle einer Menge, z. B. A?

Dahinter steht die Frage, wie die Aussagenlogischen Formeln mit Mengen und Mengengesetzen zusammenhängen.

Die Antwort auf die letztgestellte Frage ist wie folgt:

Für jedes Element x eines Universums U und jede Teilmenge A von U gibt es die Aussage $x \in A$.

Und A ist dann nichts anderes als die Menge aller x, für die die Aussage $x \in A$ zutrifft:

$$A = \{x \mid x \in A\} \quad \text{(intensionale Mengendarstellung)}.$$