WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

13. November 2013

ZÜ V

Übersicht:

1. Fragen, Anregungen?
2. Thema: Lösung HA 4.3
3. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 5

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Es gab die Anregung, den oder die DPLL-Algorithmen zu erläutern. Das tun wir dann in den Hinweisen zu Blatt 5!

2. Thema: Lösung HA 4.3

HA 4.3:

Behauptung:
Es seien F und H aussagenlogische Formeln mit

$$\models (F \rightarrow H)\,.$$

Seien V_F bzw. V_H die Menge der der aussagenlogischen Variablen, welche in F bzw. H vorkommen. Es gelte $V_F \cap V_H \neq \emptyset$.

Dann gibt es stets eine aussagenlogische Formel G, so dass gilt:

$$\models (F \rightarrow G) \text{ und } \models (G \rightarrow H), \quad \text{wobei} \quad V_G \subseteq V_F \cap V_H\,.$$

Bemerkungen:

1. Der Satz wird u.A. als *Interpolationssatz in der Aussagenlogik* bezeichnet.

2. Derjenige Teil der Variablen von F, die nicht in H vorkommen, machen es offenbar möglich, Fallunterscheidungen für F zu betrachten, aus denen stets H folgt, denn die Fallunterscheidungen beeinflussen offenbar **nicht** die Gültigkeit von H.

Diese Beobachtung kann zur Beweisidee führen.

Aufgabe:

(a) Es gelte
$F = (\,(A \wedge \neg(B \to C)) \vee \neg((B \vee C) \to A)\,)$ und
$H = ((A \wedge C) \to D)\,.$

 (i) Zeigen Sie, dass tatsächlich $\models (F \to H)$ gilt.
 (ii) Zeigen Sie, dass die Behauptung für diese gegebenen Formeln F, H korrekt ist, indem Sie eine entsprechende Formel G konstruieren.

Hinweis: Stellen Sie die Wahrheitstabelle zu $(F \to H)$ auf, um $\models (F \to H)$ zu zeigen. Überlegen Sie sich dann, in welchen Zeilen dieser Tabelle für die gesuchte Formel G notwendigerweise eine 1 eingetragen werden muss.

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptung stets gilt, indem Sie Ihre Konstruktion aus (a) verallgemeinern und die Korrektheit der Konstruktion zeigen.

Lösung:

4.3a (i):

Vorbereitung:

F ist eine Disjunktion der linken Seiten von

$$\begin{aligned} A \wedge \neg(B \rightarrow C) &\equiv A \wedge (B \wedge \neg C) \qquad \text{und} \\ \neg((B \vee C) \rightarrow A) &\equiv \neg A \wedge (B \vee C)\,. \end{aligned}$$

Für H gilt die Äquivalenz

$$H \equiv \neg A \vee \neg C \vee D\,.$$

Erster Teil der Wahrheits(wert)tabelle für $\beta(D) = 0$:

A	B	C	D	$A \wedge (B \wedge \neg C)$	$\neg A \wedge (B \vee C)$	F	H	$F \rightarrow H$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

Der zweite Teil der Wahrheitswerttabelle für $\beta(D) = 1$ unterscheidet sich vom erster Teil lediglich in der Spalte H. Die Spalte H enthält ausschließlich Einträge mit Wert 1.

Damit ist gezeigt, dass $F \rightarrow H$ allgemeingültig ist.

4.3a (ii):

Es gilt $V_F \cap V_H = \{A, C\}$.

Ersetzen wir die Aussagenvariable B in F durch die Aussage **false** bzw. **true** und bezeichnen die erhaltene Formel mit F_f bzw. F_t, dann können wir die Formeln F_f und F_t vereinfachen wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_f &\equiv ((A \wedge \neg(\textbf{false} \to C)) \vee \neg((\textbf{false} \vee C) \to A)) \\
&\equiv \neg A \wedge C\,, \\
F_t &\equiv ((A \wedge \neg(\textbf{true} \to C)) \vee \neg((\textbf{true} \vee C) \to A)) \\
&\equiv \neg(A \wedge C)\,.
\end{aligned}$$

Wir setzen $G = F_f \vee F_t$.

Offenbar gilt
$G = F_f \vee F_t = (\neg A \wedge C) \vee \neg(A \wedge C) \equiv \neg(A \wedge C) = F_t$.

A	B	C	D	$F_t = \neg(A \wedge C)$	G	F	H	$G \to H$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

Der Tabelle entnimmt man $\models F \to G$ und $\models G \to H$. Offenbar gilt hier auch $V_G \subseteq V_F \cap V_H$.

Dies bedeutet, dass die eingangs aufgestellte Behauptung im Fall der Formel F der Aufgabe 4a korrekt ist.

4.3b:

Bemerkung: Das Verfahren hing lediglich davon ab, ob B eine Variable in V_F und gleichzeitig nicht in V_H war.

Selbstverständlich kann man dieses Verfahren mit jeder Variablen aus $V_F \setminus V_H$ nacheinander durchführen, solange bis $V_F \setminus V_H$ leer ist.

Seien $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = V_F \setminus V_H$ mit n paarweise verschiedenen Variablen A_i.
Dann gibt es 2^n Möglichkeiten, alle A_i gleichzeitig durch konstante Aussagen zu ersetzen.

Entsprechend seien die aus F erhaltenen 2^n Formeln $F_{s_1}, F_{s_2}, \dots, F_{s_{2^n}}$.

Dann setzt man $G = \bigvee_{i=1}^{2^n} F_{s_i}$.

Wir beweisen nun ein Reduktionsverfahren für eine einzelne Variable x, d.h. wir beweisen den folgenden Satz.

Seien $x \in V_F \setminus V_H$ und $F \to H$ allgemeingültig.
Dann gilt

1. $\models F \to F_f \vee F_t$.
2. $\models F_f \vee F_t \to H$.
3. $x \notin V_{F_f} \cup V_{F_t}$.

Natürlich steht hier x für eine beliebige, aber bestimmte Variable. Im strengen Formalismus des Aussagenkalküls kommen hier diejenigen Variablen in Frage, die man als Variable sozusagen „deklariert" hat, z.B. $p, q, r, s, \ldots$.

Beweis von (1):

Man erzeugt den Syntaxbaum zu einer gegebenen Formel.

An den Blättern des Baumes stehen die Variablen und die atomaren Ausdrücke **true** oder **false**

Wir ersetzen in den Blättern der Formel F die Variable x durch den Ausdruck **true** bzw. **false** und bezeichnen die erhaltene Formel mit F_t bzw. F_f.

Zu beweisen ist:
$[F \rightarrow F_f \vee F_t](\beta) = 1$ für alle passenden Belegungen der Variablen von $F \rightarrow F_f \vee F_t$.

Beweis:

Sei β eine passende Belegung der Variablen von $F \rightarrow F_f \vee F_t$.

Falls $\beta(x) = 0$, dann gilt offenbar $[F](\beta) = [F_f](\beta)$ (siehe Syntaxbaum) und es folgt $[F \rightarrow F_f \vee F_t](\beta) = 1$.

Falls $\beta(x) = 1$, dann gilt offenbar $[F](\beta) = [F_t](\beta)$ (siehe Syntaxbaum) und es folgt $[F \rightarrow F_f \vee F_t](\beta) = 1$.

D.h. $F \rightarrow F_t \vee F_f$ allgemeingültig ist.

W.z.b.w.

Beweis von (2):

Zu beweisen ist:
$[F_f \vee F_t \rightarrow H](\beta) = 1$ für alle passenden Belegungen der Variablen von $F_f \vee F_t \rightarrow H$.

Beweis:
Sei β eine passende Belegung der Variablen von $F_f \vee F_t \rightarrow H$.

<u>Falls $[F_f \vee F_t](\beta) = 0$</u>, dann folgt die Behauptung.

Falls $[F_f](\beta) = 1$,

dann definieren wir eine Belegung β' der Variablen
$\{x\} \cup V_{F_f} \cup V_{F_t} \cup H$,
so dass $\beta'(x) = 0$ und $\beta'(y) = \beta(y)$ für alle $y \in V_{F_f} \cup V_{F_t} \cup H$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}
[F_f \vee F_t \rightarrow H](\beta) &= [F_f \rightarrow H](\beta) \\
&= [F_f \rightarrow H](\beta') \\
&= [F \rightarrow H](\beta') \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Falls $[F_t](\beta) = 1$,

dann definieren wir eine Belegung β' der Variablen
$\{x\} \cup V_{F_f} \cup V_{F_t} \cup H$,
so dass $\beta'(x) = 1$ und $\beta'(y) = \beta(y)$ für alle $y \in V_{F_f} \cup V_{F_t} \cup H$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}
[F_f \vee F_t \rightarrow H](\beta) &= [F_t \rightarrow H](\beta) \\
&= [F_t \rightarrow H](\beta') \\
&= [F \rightarrow H](\beta') \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

3. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 5

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 5.1:

Man kann die Normalformen (KNF oder DNF) von Formeln F_1 und F_2 leicht durch äquivalente Umformungen erhalten (siehe 5.2b).

Wenn man also Schwierigkeiten hat, eine konkrete Umformung zu bewerkstelligen, dann könnte man daran denken die Normalformen beider Formeln zu vergleichen.

Das funktioniert aber in der Regel nur dann sehr einfach, wenn die Normalformen „vollständig sind“, d.h., dass z.B. bei der DNF in jeder Konjunktion alle Variablen erscheinen müssen.

Man kann dies ebenfalls mit äquivalenten Umformungen erreichen! Wie?

Beispiel:

Es gilt

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A\,. \qquad \text{(disjunktives Absorptionsgesetz)}$$

Linke und rechte Seiten sind bereits in DNF.

Allerdings ist die linke Normalform nicht vollständig.

Um eine vollständige Normalform zu erhalten, muss

$$B \vee \neg B \equiv \textbf{true}$$

passend verwendet und vereinfacht werden, wie folgt:

Es gilt

$$\begin{aligned} A \vee (A \wedge B) &\equiv ((A \wedge (B \vee \neg B)) \vee (A \wedge B) \\ &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \\ &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \\ &\equiv A\,. \end{aligned}$$

Mit obiger Einsetzung und entsprechender Vereinfachung sind nun linke und rechte Seiten identisch.

noch **ad HA 5.1:**

Durch Probieren kann man aber oft kürzere Umformungsketten finden.

(a) Es empfiehlt sich meistens andere Operatoren als $\neg, \wedge, \vee$ zu ersetzen. Dann erst kann man mit DeMorgan den Operator $\neg$ bis zu den Variablen ,,durchschieben".

(b) Wie kann man $(C \vee B) \wedge (C \vee \neg B)$ äquivalent verkürzen?

ad HA 5.2:

Die DNF hat den Vorteil, dass sie unmittelbar aus einer Wahrheits(wert)tabelle abgelesen werden kann.

Man beachte dabei, dass zur Auswahl einer Zeile natürlich die der Zeile entsprechenden 0,1-Werte aller Parameter erfüllt sein müssen. Man benötigt nur die Zeilen für den Wahrheitswert 1.

Man kann sagen, dass die Normalformen lediglich eine andere, u.U. praktische, Form einer Aufschreibung von Wahrheitswerttabellen sind.

ad HA 5.3:

Der DPLL-Algorithmus 2 der Vorlesung wird zunächst z.B. die Variable A wählen und mit einer Fallunterscheidung

$$F[A\backslash\textbf{true}] \quad \text{bzw.} \quad F[A\backslash\textbf{false}]$$

die Variable A aus den Klauseln bzw. die entsprechende Klausel eliminieren.

Der Baum der entstehenden Fallunterscheidungen sollte übersichtlich protokolliert werden.